

國立成功大學
機械工程學系
碩士論文

可靠度設限資料之反應曲面於工程設計演
進之應用

Surrogate-Assisted Design Evolution with Censored Reliability Data
in Engineering Design

研究生：許佳豪
指導教授：詹魁元博士

中華民國一百年七月

可靠度設限資料之反應曲面於工程設計演進之應用

Surrogate-Assisted Design Evolution with Censored Reliability Data
in Engineering Design

研 究 生：許佳豪

Student: Chia-Hao Hsu

指 導 教 授：詹魁元博士

Advisor: Dr. K.-Y. Chan

國立成功大學
機 械 工 程 學 系
碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering
National Cheng Kung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Dept. of Mech. Eng.

July 2011

Tainan, Taiwan

中華民國一百年七月

國立成功大學

碩士論文

可靠度設限資料之反應曲面於工程設計演進之應用

Surrogate-Assisted Design Evolution with Censored Reliability Data in Engineering Design

研究生：許佳豪

本論文業經審查及口試合格特此證明

論文考試委員：

陳象豪

李孟輝

方冠元

指導教授：

方冠元

系(所)主管：

林文忠

中華民國 100 年 7 月 11 日

可靠度設限資料之反應曲面於工程設計演進之應用

學生：許佳豪

指導教授：詹魁元博士

國立成功大學機械工程學系

摘要

在產品設計中，壽命和可靠度是最重要的工程屬性。但由於涉及複雜且交錯的物理現象，定義一個系統壽命是件具有挑戰性的任務。在工程上，要預測時變的可靠度和系統壽命，大部分須透過實際量測所得的可靠度設限資料來著手。在已成型的設計上，統計分析這些設限資料能提供很有用的資訊，但對新的設計而言，執行這套測量的方法，需要耗費大量的時間和資源。

本論文將延伸現有產品的資訊，以預測已有設計但還在發展階段的產品之壽命。首先，我們用最大似然法去擬合現有設計的可靠度資料，得到現有設計跟時間相關的可靠度函數。每組設計都可以得到一組最佳的可靠度分佈機率及信賴區間的預測參數。舉例來說，對一個韋伯的機率分佈函數，我們會將它的位置參數、位置參數變異數、尺度參數、尺度參數變異數及位置參數與尺度參數的共變異數，共同作為壽命預測參數，再利用Kriging模型去建構一個與設計相關的可靠度函數反應曲面，將現有的設計變數及其可靠度分佈參數和信賴區間作連結。這樣既可在產品設計初期和進行可靠度試驗之前就可預測它跟時間相關的可靠度分佈，也可以預測其信賴區間。

本文最後利用範例來說明此方法的有效性，用懸臂樑及腳踏車車架之生命週期的最佳化設計作為範例，結合Kriging模型與最大似然法的有效性，進行生命周期最佳化評估，結果顯示，此方法可行性高且可預測其最佳設計和其時間相關的可靠度量值。

Surrogate-Assisted Design Evolution with Censored Reliability Data in Engineering Design

Student: Chia-Hao Hsu

Advisor: Dr. K.-Y. Chan

Department of Mechanical Engineering
National Cheng Kung University

ABSTRACT

Life and reliability are among the most important engineering attributes in product design. Determining the life of a system is a challenging task due to the complex physical phenomena involved. In engineering practice time-dependent performances and the life of a system are mostly obtained by on-site measurements in the form of reliability data. Statistical analysis with these data could provide useful information in understanding a design. With a new design in its concept stage, the standard approach requires measurements on mass prototypes that requires a large amount of time and resources. In this research we extend the information of existing products to predict the performances and life of a design in the concept development stage. We first use the maximal likelihood (ML) method with respect to reliability data in fitting the time-dependent performances of existing design results. Each design outcome is then associated with a set of optimal distribution parameters accompanied by a given confidence interval. For example with location-scale distributions such as Weibull, we focus on the location parameter and its variance, the scale parameter and its variance, and the covariance of the location and scale parameters. A Kriging model that aims to interpolate a design with its multiple attributes is then created to build the hyper-surface of the relations between design variables and all the ML parameters with existing field data. By deliberately combining Kriging model and MLE, we are able to obtain not only the predicted life of a design before its production and testing, but also the ‘confidence’ of the prediction. Various numerical examples show the validity and the efficiency of the proposed method. In this work we demonstrate the usefulness of the Kriging model by integrating it in the optimal life-cycle design of cantilever beam and bicycle frame. An adjustable compliant back support is to be optimized with constraints on the life and reliability under uncertain operating conditions. Results show that the proposed method could readily be implemented to predict any time-dependent performances.

誌 謝

本篇論文的完成，首先要感謝我的指導教授 詹魁元老師，老師在研究所的兩年期間，不論是在課業與待人處世上皆獲益良多，讓學生在這幾年來成長了許多，對於老師的教誨，學生將銘記在心。

感謝李孟穎老師在學生研究的期間，給予學生許多觀念上的導正，使學生在研究上能有所突破。感謝陳家豪老師對於本論文的指導與建議，使學生的論文可更加完善。

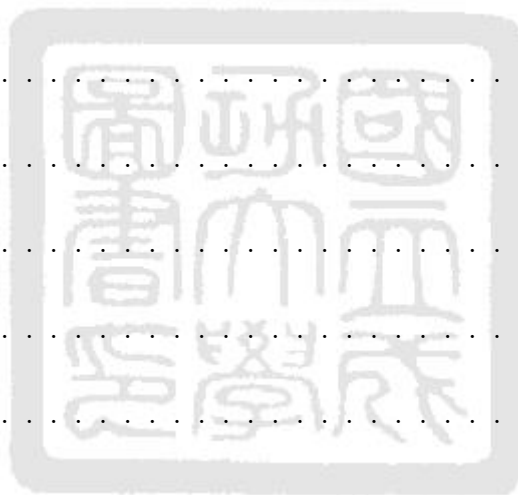
在我從進成大到碩士畢業的這幾年中，要感謝系統最佳化實驗室的夥伴一路陪我渡過。感謝已經畢業的學長們：彥智、凱勛、東信、淳民、達叔、琇雯，在研究及生活上給予許多幫助。還有實驗室的夥伴：子頡、勝昌、季儒、彬儀、伊倩、力豪、佾君、東泰、典運、嘉珮、佑安、庭玉，謝謝你們一同陪伴我度過研究生涯中的歡樂與艱難時刻。

感謝雲科機械的同學，大家在畢業後還常常團結且給予鼓勵和協助。感謝成大田徑的夥伴，在操場上一同練習、一起參加比賽，且在我最後一年的大專盃上拿下金牌，讓我的田徑生涯畫下完美的句點。

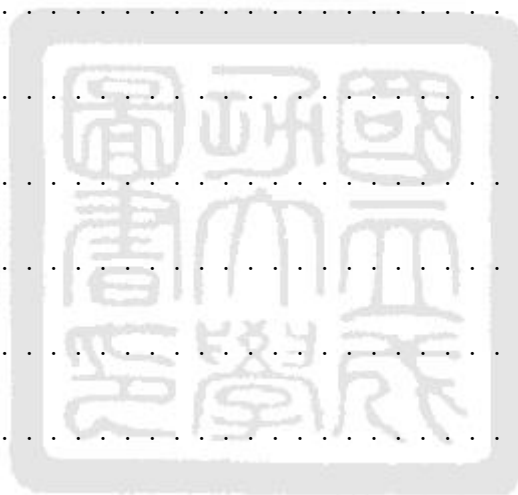
最後要感謝我的父母和家人，感謝你們從小至今的支持與鼓勵，讓我可以專心的念書並完成學業，感謝你們。

目 錄

書名頁	i
論文口試委員審定書	ii
中文摘要	iii
英文摘要	iv
誌謝	v
目錄	vi
表目錄	x
圖目錄	xi
符號說明	xv
第一章、緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究目的	2
1.3 論文架構	2
第二章、文獻探討	4
2.1 可靠度資料型態與量測	4
2.1.1 可靠度試驗	5
2.1.2 可靠度資料	6
2.1.3 可靠度相關函數	6
2.1.4 常見機率分佈函數	8
2.1.5 可靠度參數推估	12



2.1.6	可靠度信賴區間	14
2.1.7	可靠度試驗樣本試件數量多寡之影響	17
2.2	現行可靠度最佳化方法	21
2.2.1	不確定因素模擬	21
2.2.2	非時變隨機變數可靠度計算	22
2.2.3	時變隨機變數可靠度計算	25
2.2.4	可靠度最佳化設計	27
2.3	文獻討論	28
第三章	、研究方法	30
3.1	可靠度函數反應曲面	30
3.2	反應曲面法	32
3.2.1	回歸分析	32
3.2.2	類神經網路	33
3.2.3	Kriging模型	35
3.3	時變可靠度最佳化設計	36
3.4	演算流程	37
第四章	、Kriging反應曲面法	39
4.1	Kriging模型	39
4.1.1	Kriging理論架構	39
4.1.2	Kriging公式推導	42
4.1.3	變異圖	46
4.2	Cokriging模型	51



4.2.1	Cokriging理論架構	51
4.2.2	Cokriging公式推導	53
4.2.3	交叉變異圖	57
4.2.4	Permissible模型	62
4.3	Kriging與Cokriging模型方法比較	64
第五章、工程範例		69
5.1	簡易懸臂樑安全問題	69
5.1.1	單一設計可靠度量測與參數推估	69
5.1.2	不同設計下之可靠度參數	70
5.1.3	Kriging與Cokriging模型比較	71
5.1.4	時變可靠度最佳化設計	73
5.2	腳踏車車架設計	76
5.2.1	單一設計可靠度量測與參數推估	76
5.2.2	不同設計下之可靠度參數	78
5.2.3	Kriging與Cokriging模型比較	79
5.2.4	時變可靠度最佳化設計	86
5.3	小結	88
第六章、結論		89
6.1	研究貢獻	89
6.2	建議	89
6.3	未來研究方向	91
參考文獻		92



表 目 錄

2.1	真空管可靠度量測	5
2.2	發電機葉片可靠度資料	15
2.3	發電機葉片可靠度推估結果	16
2.4	懸臂樑設計參數	17
2.5	樣本數為30之可靠度資料	18
2.6	樣本數為120之可靠度資料	18
4.1	Kriging模型和Cokriging模型誤差比較	66
4.2	均方根誤差結果	66
5.1	懸臂樑設計參數	69
5.2	懸臂樑之可靠度函數分佈圖	70
5.3	懸臂樑設計變數與可靠度參數	71
5.4	懸臂樑設計可靠度參數均方根誤差	71
5.5	懸臂樑最佳化設計及壽命結果	74
5.6	腳踏車車架設計參數	77
5.7	腳踏車車架可靠度資料	77
5.8	腳踏設計變數與可靠度參數	78
5.9	腳踏車車架設計可靠度參數均方根誤差	79
5.10	腳踏車車架設計可靠度函數限制值	87
5.11	腳踏車車架最佳化設計及壽命結果	87

圖 目 錄

2.1	真空管之時間可靠度資訊	5
2.2	可靠度相關的函數分佈圖	8
2.3	高斯分佈圖	9
2.4	指數分佈圖	10
2.5	對數分佈圖	11
2.6	韋伯分佈圖	11
2.7	設限資料破壞機率	13
2.8	可靠度及信賴區間分佈	16
2.9	簡易懸臂樑	17
2.10	懸臂樑最大應力分佈	17
2.11	懸臂樑降伏應力隨時間改變的關係	17
2.12	懸臂樑隨機重複取樣示意圖	18
2.13	樣本數不同之可靠度函數結果比較	19
2.14	樣本數不同之可靠度函數信賴區間結果比較	19
2.15	樣本數不同之可靠度差異	20
2.16	可靠度最佳化設計演算	21
2.17	時變性不確定因素	25
3.1	產品可靠度評估過程	30
3.2	可靠度函數反應曲面建構	30

3.3	類神經元架構	34
3.4	不同反應曲面之比較	35
3.5	時變可靠度最佳化設計演算	37
4.1	取樣與預測位置示意圖	40
4.2	高斯過程示意圖	40
4.3	變異圖名詞示意圖	46
4.4	取樣與距離示意圖	48
4.5	靠近原點之兩個說明範例樣本圖	49
4.6	距離區域範圍示意圖	50
4.7	Camelback實驗變異圖圖	50
4.8	實驗變異圖與理論變異圖之擬合	50
4.9	最小變異圖誤差擬合結果函數比較圖	51
4.10	兩隨機函數取樣與距離示意圖	58
4.11	相關性函數取樣圖	59
4.12	相關性函數取樣位置圖	60
4.13	相關性函數檢查	60
4.14	相關性函數交叉變異雲圖	61
4.15	相關性函數交叉變異圖擬合結果	61
4.16	主隨機函數和輔助隨機函數取樣示意圖	64
4.17	Kriging和Cokriging預測示意圖	65
4.18	主隨機函數和輔助隨機函數樣本數不同預測情況	65

4.19	不同樣本數下Kriging和Cokriging均方根誤差結果比較	66
4.20	Kriging和Cokriging樣本數相同預測示意圖	67
4.21	相同樣本數下Kriging和Cokriging均方根誤差結果比較	67
5.1	簡易懸臂樑	69
5.2	懸臂樑之最大應力分佈圖	69
5.3	懸臂樑之降伏應力隨時間下降	70
5.4	懸臂樑可靠度資料	70
5.5	現有設計可靠度函數分佈情形	71
5.6	懸臂樑設計可靠度參數Kriging模型變異圖結果	72
5.7	懸臂樑設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 之Cokriging模型變異圖結果	72
5.8	懸臂樑設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	73
5.9	懸臂樑設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型變異圖結果	73
5.10	懸臂樑最佳化設計之可靠度限制條件	74
5.11	懸臂樑最佳化設計之可靠度函數	75
5.12	腳踏車車架設計	76
5.13	腳踏車車架之最大應力分佈圖	77
5.14	腳踏車車架材質之降伏應力隨時間下降	77
5.15	腳踏車車架之可靠度函數分佈圖	77
5.16	腳踏車車架外徑設計圖	78
5.17	64款腳踏車車架設計之可靠度函數	79
5.18	車架設計可靠度參數Kriging模型變異圖結果	80

5.19	車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 之Cokriging模型變異圖結果	81
5.20	車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	81
5.21	車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	81
5.22	車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	82
5.23	車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	82
5.24	車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	82
5.25	車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	83
5.26	車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	83
5.27	車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	83
5.28	車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之Cokriging模型變異圖結果	84
5.29	車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	84
5.30	車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	84
5.31	車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	85
5.32	車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果	85
5.33	車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型變異圖結果	85
5.34	腳踏車車架設計可靠度函數限制條件	87
5.35	腳踏車車架最佳化設計之可靠度函數	87
6.1	不同截面積下懸臂樑的可靠度函數結果	90
6.2	不同截面積下懸臂樑的可靠度函數差異	90
6.3	腳踏車安全設計	91

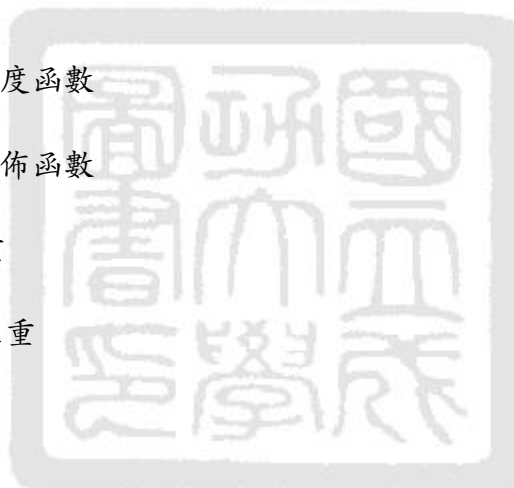
符 號 說 明

a	回歸分析之常數項
b	回歸分析之回歸係數
$f(t)$	機率密度函數
F'	可靠度函數限制值
\mathcal{F}	設計相關可靠度函數模型
$F(t)$	累積分佈函數
g	量測值
G	序率過程函數
h	點與點之間的歐幾里德距離
$h(t)$	故障函數
I_g	破壞指標函數
L	似然函數
L_v	拉格朗日方程式
\mathcal{L}	對數似然函數
p	可靠度函數參數
$P_r[\cdot]$	$[\cdot]$ 機率
P_f	破壞機率
q	設計參數
μ_q	設計參數期望值
Q	設計參數的隨機分佈



$R(t)$	可靠度分佈函數
R_e	可靠度
\mathbf{R}_α	一組隨機函數間樣本空間相關函數矩陣
\mathbf{R}_{kl}	兩組隨機函數間樣本空間相關函數矩陣
$\hat{\sigma}_{\hat{p}}$	可靠度函數參數標準差
t	時間變數
T	時間變數的隨機分佈
u	類神經網路之常數項
\mathbf{u}	標準空間對應之設計變數
\mathbf{x}	設計變數
$\mu_{\mathbf{x}}$	設計變數期望值
\mathbf{X}	設計變數之隨機分佈
$\mathbf{X}(t)$	設計變數之隨機過程
Z	高斯過程偏移量
Σ	類神經網路之加總函數
β	信賴區間因子
φ	類神經網路之活化函數
$\hat{\mu}$	位置參數
$\hat{\sigma}$	尺度參數
$\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$	位置參數與尺度參數共變異數
$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$	位置參數變異數
$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$	尺度參數變異數

γ	半變異函數
γ_{kl}	交叉半變異函數
γ_t	理論半變異函數
$\gamma_{t_{kl}}$	理論交叉半變異函數
γ_α	實驗半變異函數
$\gamma_{\alpha_{kl}}$	實驗交叉半變異函數
<i>Per</i>	Permissible模型
ν	拉格朗日因子
$\phi(t)$	標準高斯機率密度函數
$\Phi(t)$	標準高斯累積分佈函數
λ_α	Kriging模型權重
$\lambda_{k,\alpha}$	Cokriging模型權重



第一章 緒論

1.1 研究動機

產品品質的好壞，往往決定了消費者的購買意願，由於品質高的產品製造成本也相對高，間接反應在產品價格上，然而根據調查顯示，消費者有偏好購買特定高品質產品的趨勢 [1]，而可靠度又是評估品質最重要的指標之一，因此如何有效評估產品可靠度量質，是設計工程師重要課題之一。

一個好的產品往往能夠將其性能發揮到極致，所以產品在設計階段時，就必須在各種限制條件下以找出一個『最佳設計』 [2] 為目標，才不會額外浪費資源。以建造橋樑為例，除了可以發揮交通運輸外，也必須讓橋樑的強度可承受外力負載，以確保安全，並在種種的限制條件下以節省成本為目的，設計出一座最佳的橋樑。

但是由於『不確定因素』的存在，最佳設計的結果也不一定滿足所有限制條件，例如材料性質的參數，在設計中被視為定值，但是實際上仍然會變動。所以在考量最佳設計的同時，也必須需考慮不確定因素所造成的結果，將原本的最佳化問題衍生成可靠度最佳化設計問題(Reliability-Based-Design-Optimization, RBDO) [3]。可靠度最佳化設計為考慮不確定因素的存在，探討產品使用上性能的可靠度表現。目前可靠度最佳化設計在許多領域上都廣為應用，如土木 [4]、機械 [5]、化工 [6]、航空 [7] 都可以看到相關的研究。

產品性能的極致表現是考慮產品的材質和零件在完美條件下所做的評估，即使加入不確定因素，隨著長時間的使用，內部零件或材質老化、衰退等現象也會產生，而使產品的性能無法如初期的表現，因此時間對於產品的可靠度評估也是重要的考量因素。再以橋樑為例，每天承受著車輛負載及河流的沖刷，長久累積下來可能會造成橋樑崩塌的危險，如果我們可以掌握橋樑的壽命，知道橋樑在那段時間會有損壞的現象，在崩壞之前做補強，不儘可以避免崩塌的危險，更可以增加其使用壽命，以減少重新造橋所耗費的成本。

然而現行可靠度最佳化設計方法，通常都忽略使用壽命，原因是受時間影響的不確定因素太難模擬，需要耗費幾個月甚至幾年的時間，然而如果再將多個時變不確定因素加入可靠度求解，模擬出來的結果往往是無解或是不準的，目前也少有方法將時變不確定因素納入可靠度最佳化設計。而產品的使用壽命跟生命安全息息相關，所以為了確保安全，當每一項新產品開發出來後，都會經過長時間的實際可靠度量測，重新對新產品的壽命做評估，以定義

產品的使用壽命。對機械設計工程師而言，如何精準且有效率的評估產品使用可靠度是件重要且困難的課題。

1.2 研究目的

本論文希望能利用現有產品在實際上的可靠度量測及使用壽命資訊，來取代電腦模擬不確定因素所可能帶來的假設及不準度誤差，並建構出一個產品的設計與壽命的模型。在此模型下只要得到新型產品的設計資訊，就可以預測其使用壽命，以降低重新量測所耗費的成本。

本研究也將這一套方法結合產品最佳設計，進而發展出一個可以解決設計與時間兩者的『時變可靠度最佳化』設計方法，此方法除了將產品的性能發揮到最好外，在製造上也能夠考慮材料的成本以及使用的壽命，以達到生產出一個『好產品』為目的。

1.3 論文架構

本論文一共分為六章，其內容架構如下：

- 第一章：緒論
說明本論文的研究動機與目的，並介紹本論文的架構。
- 第二章：文獻回顧
主要介紹目前評估產品可靠度的方法：可靠度資料型態與量測、不確定因素模擬、可靠度最佳化設計。
- 第三章：研究方法
用反應曲面法的概念結合設計與可靠度參數，建構出一個跟設計相關的可靠度函數反應曲面，並將其應用在可靠度最佳化設計中，演變成時變可靠度最佳化設計。
- 第四章：Kriging反應曲面法
介紹Kriging模型和Cokriging模型，包括基本概念、公式推導、參數擬合，然後比較兩者的優勢。

- 第五章：工程範例

用時變可靠度最佳化設計的方法來求解懸臂樑安全問題和腳踏車車架安全設計。

- 第六章：結論與建議

總結本論文內容，對此論文提出建議，以提供未來研究發展。



第二章 文獻探討

可靠度的定義為：「產品於指定時間內、在特定的使用條件下正常的執行特定性能或功能，而不產生故障及破壞的機率」 [8]，其中以「指定期間」、「使用條件」、「特定功能」、「機率」為四個構成可靠度的主要元素，對四個主要元素說明如下：

- 指定期間：
產品一般情況使用下，其性能或零件會隨著使用的增加，而產生老化、龜裂或疲勞的現象，其破壞機率也會隨著時間不同而有所變化。所以我們必須定義產品使用期間，來做可靠度分析才有意義。
- 使用條件：
為在產品使用時的前提或限制，如限定產品的使用時環境的溼度、溫度或壓力，因為產品在使用時，其功能的表現多少都會受到環境的影響，所以必須限定產品的使用環境和操作條件，對產品功能才有可靠度評估的依據。所以一般常會見到在商品的保固說明中，會強調保固的範圍須在非人為因素的破壞及正常工作環境下的損毀。
- 特定功能：
要評估產品是否會失去此功能，必須有一套明確定義的評估標準。例如有些產品可能是完全失去功能，無法再使用，而有些產品則是無法發揮它該有功能，呈現退化的現象。但是在這個“明確定義”的準則下 [9]，去評估產品失去功能的結果都會是相同的。若產品失去此功能則稱為“破壞”(Failure)，反之則為“安全”(Safe)。
- 機率：
可靠度是以機率的形式來描述系統、產品或零件在限定的使用環境條件下與特定的期間內，能夠達到所預期任務。因此用機率來代表可靠度的分析結果。

本章節著重在討論目前針對產品可靠度的評估方法，主要分成對產品使用時間做實際量測及壽命評估，以及產品在設計上考慮不確定因素的可靠度最佳化設計方法。

2.1 可靠度資料型態與量測

在工程上，評估產品時間的可靠度仰賴實際量測，再將最後的實驗數據列表，如表2.1為

量測真空管的可靠度資料 [10]，在每段時間內記錄其破壞情況，直到所有產品都量測完為止，而根據這樣實際量測得來的可靠度資料，我們可以得到跟時間相關的可靠度資訊，如圖2.1，可以發現真空管在初期25天內會有相當高的破壞數，而到後期的破壞數目則變小。

表 2.1: 真空管可靠度量測

時間間隔(天數)	破壞數量
0 - 25	109
25 - 50	42
50 - 75	17
75 - 100	7
100 - ∞	13

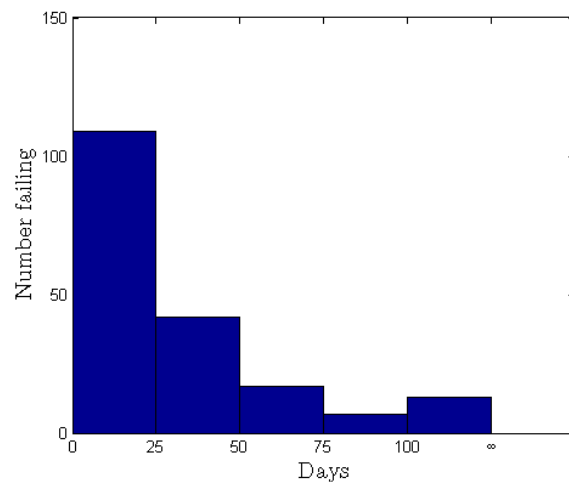


圖 2.1: 真空管之時間可靠度資訊

一般來說，從這些量測得來的可靠度資料，我們可估算出產品的可靠度，再針對不理想的部分加以修改，以增長使用壽命或提升品質，確保商機 [11]。相關研究在文獻上也廣受討論，例如： [12,13]針對新產品的可靠度資料及如何改善加以探討； [14]討論如何針對複雜的系統進行可靠度量測與分析結構。可靠度資料的來源都是經過可靠度試驗，下一小節將介紹如何由可靠度試驗的方式取得可靠度資料。

2.1.1 可靠度試驗

可靠度試驗的方法有很多，針對時間做評估的試驗，我們稱為壽命試驗。一般執行壽命試驗的目的主要在於評估產品於特定環境下的使用壽命，但是耗費時間較長久，必須投入大量的金錢或人力，而產品的可靠度資訊如果不能及時獲得並加以改善的話，往往會失去許多商機與競爭力。為了解決這樣的問題，我們會對產品執行加速壽命試驗，在可接受的試驗期間內有效評估產品的使用壽命，加速壽命試驗是可靠度試驗常見的一種方法，利用較嚴厲的環境測試條件，讓產品失效時間縮短，將得到的可靠度資料結果去估計該產品在一般環境下的使用壽命，例如提高環境溫度，增加啟動、關閉頻率。加速測試後之可靠度資料，利用應力與壽命之關係，反推得正常操作狀況下之壽命與可靠度，針對加速測試的文獻可見 [15]的整理。

2.1.2 可靠度資料

可靠度資料是由抽取樣本試件而執行可靠度試驗所量測得到的數據，一般可分為完全資料(Complete Data)與設限資料(Censored Data) [10,16]。

- 完全資料

又稱確切破壞(Exact Failure)，為所有的可靠度資料都有完整的失效時間，代表所有的試件都試驗到失效，且所有失效時間均明確記錄。

- 設限資料

又可稱作截斷資料(Truncated Data)，設定特定的時間或是一定的失效數目，當試驗達到所設定的界限即停止試驗，所以在停止試驗的時候，有些試件還是正常並無失效，其壽命都大於停止試驗的時間。設限資料又可分為I型設限跟II型設限兩種，I型設限是指當試件試驗到一定的時間時就停止，而II型設限則是當一定數量的試件失效時就停止試驗，本論文裡我們都會將所有的設限資料視為I型，主要原因是時間比容易控制，在實務上的實用性較高。設限資料又可分為左側設限(Left-Censored)、右側設限(Right-Censored)和區間設限(Interval-Censored)，左側設限代表試件在停止試驗時間前就已經失效；右側設限代表試件在此時間之後可能會失效；而在兩次試驗時間之間的失效試件為區間設限。

2.1.3 可靠度相關函數

在評估可靠度的過程中，時間是一個重要的因素 [10]，工程上常紀錄的資料型態為產品失效的關鍵時間，又稱為失效時間(Failure Time)。令 T 代表失效時間的隨機變數，在可靠度函數中， T 的數學模型可由累積分佈函數(Cumulative Distribution Function, CDF)、機率密度函數(Probability Density Function, PDF)、可靠度函數(Reliability Function)和故障函數(Hazard Function)得知。接下來會介紹它們分別在可靠度上的物理意義。

- 累積分佈函數

F 代表失效時間 T 的累積分佈函數，如方程式(2.1)，代表產品在時間 t 前失去效能或破壞機率，因此又稱為破壞機率函數(Failure Probability Function)，如圖2.2a中，產品隨著使用時間的增加，破壞機率也相對提高。

$$F(t) = P_r(T \leq t) \quad (2.1)$$

- 機率密度函數

當隨機變數的時間 T 為連續(Continuous)時，如圖2.2b，機率密度函數可以由累積分佈函數微分得到，如方程式(2.2)，在意義上為單位時間的破壞機率，因為考慮連續的關係， t 不會是一個點，而是一小段範圍，由積分來計算機率密度函數，它是代表在時間 $t \sim (t + \Delta t)$ 的破壞機率，所以累積分佈函數在 t 的結果是由機率密度函數從0到 t 與橫軸所包圍的面積，可由積分得到，如方程式(2.3)。

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (2.2)$$

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

- 可靠度函數

可靠度函數又稱為生存函數(Survival Function)，用 R_e 來代表，它是剛好跟破壞機率函數相反的數學函數，代表產品在時間 t 前不會壞掉的機率，如方程式(2.4)，圖2.2c。

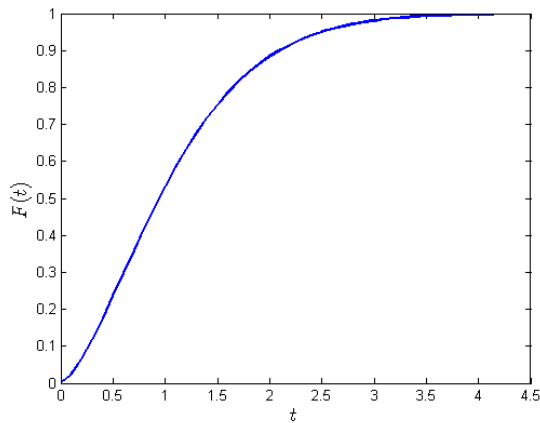
$$R_e(t) = 1 - F(t) = \Pr_r(T > t) = \int_t^{\infty} f(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

- 故障函數

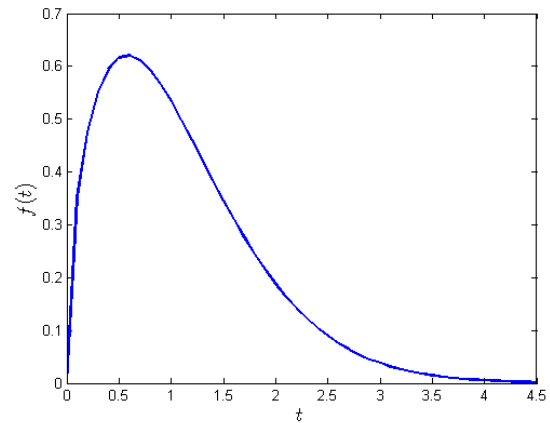
故障函數又稱為失效率函數(Failure Rate Function)，其意義為考慮時間變化趨近於零($\Delta t \rightarrow 0$)的極限值，即是代表產品瞬間的破壞比率，方程式可由(2.5)表示

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr_r(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2.5)$$

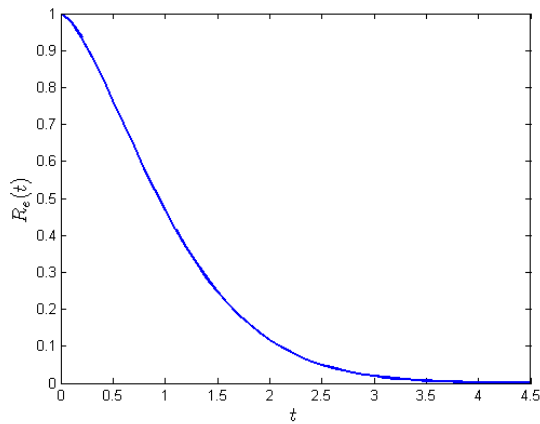
由此定義看已知，故障函數代表在任何一瞬間的單位時間不良率，較嚴格的說法為瞬時失效率函數(Instantaneous Failure Rate Function)，如圖2.2d。



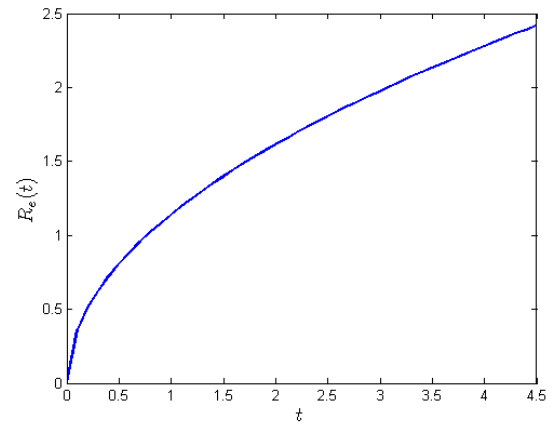
(a) 累積分佈函數



(b) 機率密度函數



(c) 可靠度函數



(d) 故障函數

圖 2.2: 可靠度相關的函數分佈圖

2.1.4 常見機率分佈函數

- 高斯分佈(Gaussian Distribution)

高斯分佈又稱為常態分佈(Normal Distribution)，在品質工程與品質管制中最為應用的機率分佈函數。其機率密度函數如方程式(2.6)，累積分佈函數則為方程式(2.7)。

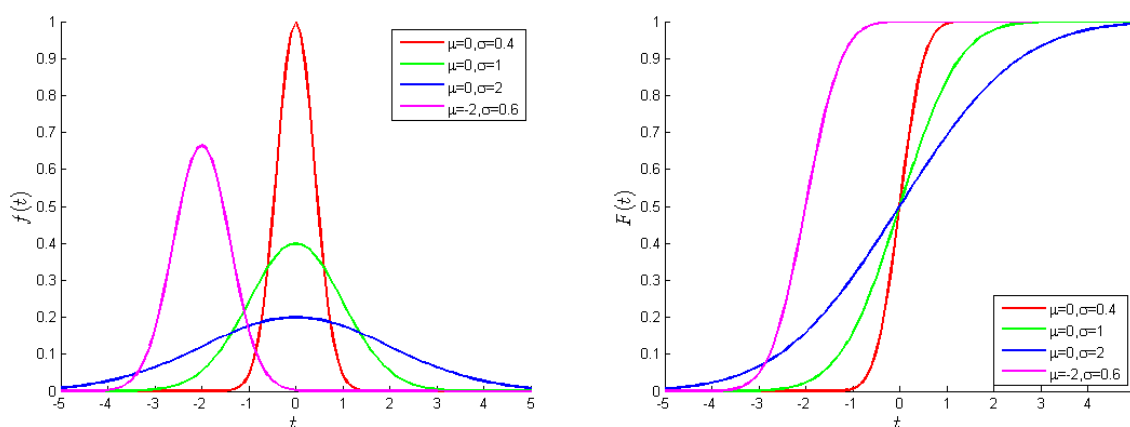
$$f(t) = \phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.6)$$

$$F(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)^2\right] d\tau \quad (2.7)$$

若隨機變數 T 符合高斯分佈，我們可以記為 $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 為一個平均值，為高斯分佈的位置參數， σ 為標準差，為高斯分佈的尺度參數，決定了函數分

佈的集中程度，如圖2.3a所示，在 $\mu = 0$ 、 σ 不同下的分佈狀況。而標準高斯分佈指的是 $\mu = 1$ 、 $\sigma = 0$ 的高斯分佈。高斯分佈除了有對稱性(Symmetric)與鐘型(Bell Shaped)的特色外，還有一些數學上的特質，例如若有兩組隨機變數均各自為高斯分佈， $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 、 $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ，則他們線性組合會是一個高斯分佈。如方程式(2.8)。

$$V = aX \pm bY \sim N(a\mu_X \pm b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 \pm b^2\sigma_Y^2) \quad (2.8)$$



(a) 高斯機率密度函數圖

(b) 高斯累積分佈函數圖

圖 2.3: 高斯分佈圖

- 指數分佈(Exponential Distribution)

壽命時間呈指數分佈之機率密度函數、累積分佈函數如圖(2.4)所示，其方程式如(2.9)與(2.10)，由圖可以看出 $f(t)$ 在 $t = 0$ 呈現最大值，所以 $f(0) = \lambda$ ，指數分佈的可靠度函數為 $e^{-\lambda t}$ ，其趨勢與機率密度函數相同。

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (2.9)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.10)$$

其中 $\lambda > 0$ 是分佈的一個參數，常被稱為速率參數(Rate Parameter)。指數分佈的區間為 $[0, \infty)$ 。

- 對數常態分佈(Lognormal Distribution)

一個在區間 $(0, \infty)$ 隨機變數 T 如果在取對數之後是常態分佈，我們稱 T 為對數常態分

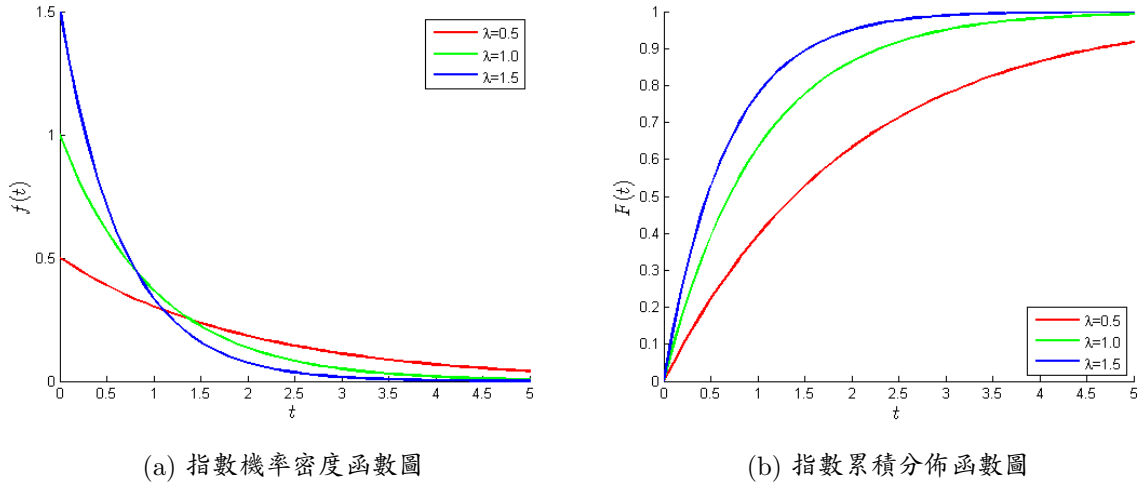


圖 2.4: 指數分佈圖

佈。其機率密度函數方程式為(2.11)，累積分佈函數為方程式(2.12)。

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(t - \mu)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(\tau) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] d\tau \quad (2.12)$$

對數常態分佈的期望值與變異數為

$$E(T) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.13)$$

$$\text{Var}(T) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.14)$$

• 韋伯分佈(Weibull Distribution)

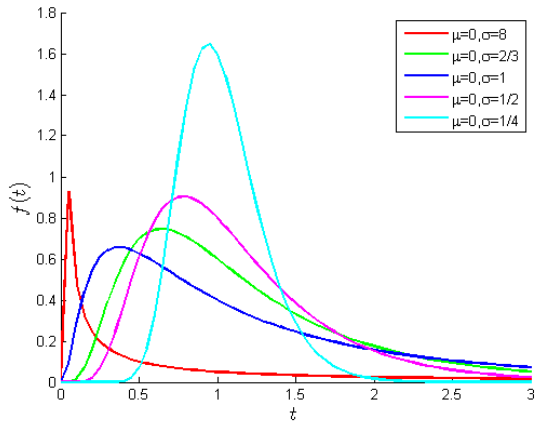
韋伯分佈為指數分佈的擴展，其機率密度函數如方程式(2.15)，累積分佈函數如方程式(2.16)。

$$f(t) = \frac{\kappa}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\kappa-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda} \right)^\kappa} \quad (2.15)$$

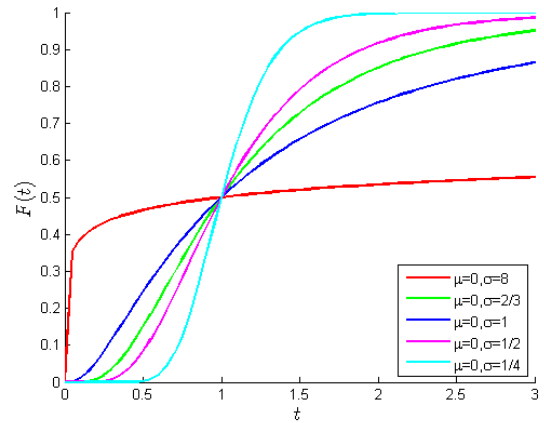
$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda} \right)^\kappa} \quad (2.16)$$

其中 $\lambda > 0$ 是比例參數(Scale Parameter)， $\kappa > 0$ 是形狀參數(Shape Parameter)。韋伯分佈具有多變樣性，例如當 $\kappa = 1$ 就會得到指數分佈，另一方面也可以從最小值極值分佈(Smallest Extreme Value, SEV)推導出韋伯分佈，如下列方程式(2.17)(2.18)，

$$f(t) = \Phi_{\text{sev}} \left[\frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \quad (2.17)$$



(a) 對數機率密度函數圖

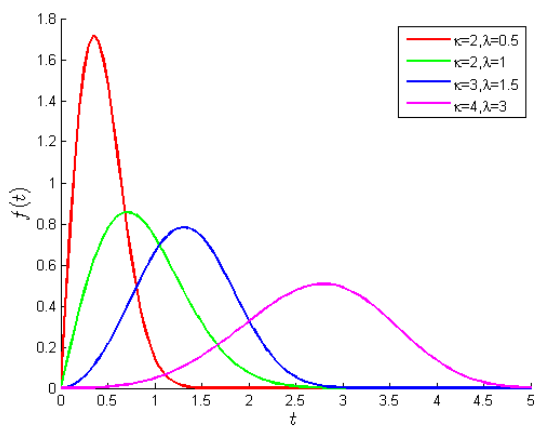


(b) 對數累積分佈函數圖

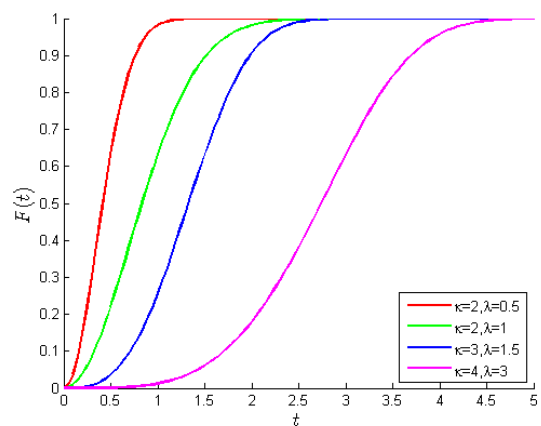
圖 2.5: 對數分佈圖

$$F(t) = \frac{1}{\sigma t} \phi_{\text{sev}} \left[\frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right] \quad (2.18)$$

其中 $\Phi_{\text{sev}}(z) = 1 - \exp[-\exp(z)]$ 而 $\phi_{\text{sev}}(z) = \exp[z - \exp(z)]$ ，也就表示韋伯分佈可視為很多隨機變數最小值的近似分佈，產品的破壞原因起因於產品的最脆弱處，所以極值分佈之一的韋伯分佈很適合用來模擬產品的破壞數據，例如因熱集中或電場集中所引起的電子零件損壞 [17]、應力集中所引起的金屬材料裂紋成長及破壞。圖 2.6 為韋伯的函數分佈圖。



(a) 韋伯機率密度函數圖



(b) 韋伯累積分佈函數圖

圖 2.6: 韋伯分佈圖

2.1.5 可靠度參數推估

在可靠度的研究中，常需要用到幾種機率分佈及參數來描述產品的失效情況，而這些機率分佈、參數和可靠度特性往往都是未知的，需要根據樣本的量測值所進行機率參數推估，這些量測值則為可靠度資料，而最大似然法(Maximum Likelihood)為可靠度分析最常用的參數推估法。

最大似然法的基本原理為：假設母體分佈類型已知，而推估的分佈參數為 \mathbf{p} ，所有參數量值中，可以重現樣本的最大機率參數值為 $\hat{\mathbf{p}}$ ，則 $\hat{\mathbf{p}}$ 為 \mathbf{p} 的最大似然值，這樣的參數推估法稱為最大似然法。時間 T 為連續型隨機變數的母體，其母體的機率密度函數為 $f(t_i, \mathbf{p})$ ，當隨機抽取一組樣本為 n 個試件時，第 i 個試件在時間 t_i 出現破壞的機率為 $f(t_i, \mathbf{p})$ ，則此組樣本的似然函數(Likelihood Function) $L(\mathbf{p})$ 為：

$$L(\mathbf{p}) = f(t_1, \mathbf{p}) \times f(t_2, \mathbf{p}) \times \cdots \times f(t_n, \mathbf{p}) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \mathbf{p}) \quad (2.19)$$

若樣本是由一個機率分佈參數為 \mathbf{p} 的母體中隨機抽取的，根據找極大值和極小值的定理，若要讓似然函數的結果為最大值，則此最大之參數 \mathbf{p} 發生在似然函數一階微分等於零的位置：

$$\frac{\partial L(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (2.20)$$

由可靠度資料中的確切破壞與設限資料的特性我們可以知道它們在時間上的破壞機率，確切破壞可用單位機率密度函數表示，則設限資料可用累積破壞機率函數表示，如圖(2.7)所示，各別的似然函數表示如下：

- 確切破壞

$$L_i(\mathbf{p}) = f(t_i, \mathbf{p}) \quad (2.21)$$

- 左側設限

$$L_i(\mathbf{p}) = \int_0^{t_i} f(t) dt = F(t_i) - F(0) = F(t_i) \quad (2.22)$$

- 區間設限

$$L_i(\mathbf{p}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt = F(t_i) - F(t_{i-1}) \quad (2.23)$$

- 右側設限

$$L_i(\mathbf{p}) = \int_{t_i}^{\infty} f(t)dt = F(\infty) - F(t_i) = 1 - F(t_i) \quad (2.24)$$

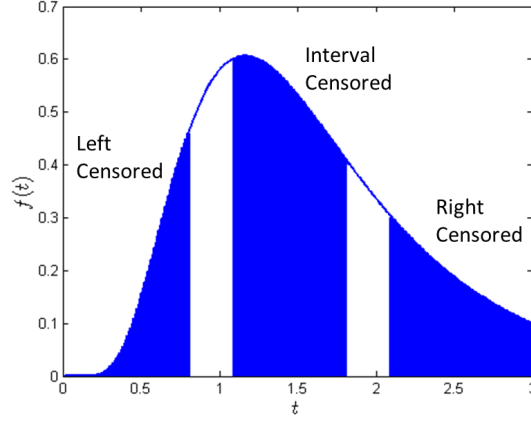


圖 2.7: 設限資料破壞機率

針對一組 n 個包含確切破壞與右側設限時間 t 的可靠度資料，其隨機變數 T 的似然函數我們用位置尺度(Location-Scale)分佈函數來表示，如方程式(2.25)，在論文中我們將所有的設限資料都視為右側設限，若想考慮其他設限狀況，可自行做替換。

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n L_i(\mu, \sigma; \text{data}_i) = \prod_{i=1}^n [f(t_i; \mu, \sigma)]^{\delta_i} [1 - F(t_i; \mu, \sigma)]^{1-\delta_i} \quad (2.25)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{當 } t_i \text{ 為確切破壞} \\ 0 & \text{當 } t_i \text{ 為右側設限} \end{cases}$$

由於先前討論過最小極值的韋伯分佈常用來做產品的破壞模擬，此論文內容的似然函數都會以最小極值的韋伯分佈來進行，我們將(2.17)和(2.18)帶入似然函數(2.25)可得方程式(2.26)，此外對數常態分佈也常應用在可靠度分析上，我們將兩此機率分佈表示如下：

- 韋伯分佈

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma t_i} \phi_{\text{sev}} \left[\frac{\log(t_i) - \mu}{\sigma} \right] \right]^{\delta_i} \left[1 - \Phi_{\text{sev}} \left[\frac{\log(t_i) - \mu}{\sigma} \right] \right]^{1-\delta_i} \quad (2.26)$$

- 對數常態分佈

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma t_i} \phi \left[\frac{\log(t_i) - \mu}{\sigma} \right] \right]^{\delta_i} \left[1 - \Phi \left[\frac{\log(t_i) - \mu}{\sigma} \right] \right]^{1-\delta_i} \quad (2.27)$$

由於似然函數的計算繁雜，為了計算方便，我們會將方程式(2.25)的似然函數取對數，用 \mathcal{L} 來表示：

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma) = \log[L(\mu, \sigma)] = \log \left[\prod_{i=1}^n L_i(\mu, \sigma; \text{data}_i) \right] = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\mu, \sigma; \text{data}_i) \quad (2.28)$$

其最大值會生在似函然數一階微分等於零的位置上，因此我們分別對 μ 和 σ 進行一階的偏微分

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.29)$$

從上面的方程式計算，我可以得到 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 為可靠度的參數，有了參數我們就可以得到可靠度在該假設分佈狀況下的預測函數：

$$\hat{F}(t) = F(t, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \quad (2.30)$$

2.1.6 可靠度信賴區間

因為樣本的隨機特性導致推估的參數 \mathbf{p} 會有所變動，與其真實值之誤差，一般用 $(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})$ 表示。因此在進行參數推估的時候，我們不僅要考慮對抽取出來的樣本作參數推估，還要估算此推估的準確範圍，以代表實際參數 \mathbf{p} 在這個範圍的信賴程度，此範圍稱為信賴區間(Confidence Interval)。假設一個母體 T 的分佈含有一個未知參數 \mathbf{p} ，若由樣本確定兩個統計量 $\underline{\mathbf{p}}$ 和 $\overline{\mathbf{p}}$ ，給予一定的顯著水準 β ， $0 < \beta < 1$ ，則滿足

$$Pr(\underline{\mathbf{p}} \leq \mathbf{p} \leq \overline{\mathbf{p}}) = 1 - \beta \quad (2.31)$$

則 $\underline{\mathbf{p}}$ 和 $\overline{\mathbf{p}}$ 分別稱為參數 \mathbf{p} 的 $100(1 - \beta)\%$ 信賴區間的下界與上界，我們通常會用高斯近似信賴區間(Normal-Approximation Confidence Interval)來計算參數 \mathbf{p} 的範圍，其表示方法如下：

$$[\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}] = \hat{\mathbf{p}} \pm z_{1-\beta/2} \hat{s}_{\hat{\mathbf{p}}} \quad (2.32)$$

其中 z_p 為標準高斯的分位數，即 $\Phi_{\text{nor}}(z_p) = p$ ，最常用的信賴區間為95%，其相對的 $\beta = 0.05$ 、 $p = 0.95$ ，則由查表得知 $z_{0.95} = 1.96$ 。方程式(2.32)中參數的標準差 $\hat{s}_{\hat{\mathbf{p}}}$ 計算方式如方程式(2.33)，是對似然法 $\mathcal{L}(\mathbf{p})$ 取二次偏微分再帶入 $\hat{\mathbf{p}}$ 再做計算：

$$\hat{s}_{\hat{\mathbf{p}}} = \sqrt{\left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}^2} \right]^{-1} \Big|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}}} \quad (2.33)$$

同樣的我們以位置尺度函數作範例，則其可靠度函數 \hat{F} 之信賴區間如方程式所示

$$[\underline{F}, \overline{F}] = \hat{F} \pm z_{1-\beta/2} \hat{s}_{\hat{F}} \quad (2.34)$$

$$\hat{s}e_{\hat{F}} = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)^2 \widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}} + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^2 \widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}} \right]^{1/2} \quad (2.35)$$

由方程式(2.33)的計算方式可得到共變異數矩陣(Covariance Matrix)

$$\widehat{\Sigma}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} = \begin{bmatrix} \widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}} & \widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} \\ \widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} & \widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.36)$$

因此我們可以將信賴區間的函數與時間及參數的關係表示如下

$$[\underline{F}, \overline{F}] = \hat{F}(t, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \pm z_{1-\beta/2} \hat{s}e_{\hat{F}}(t, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}, \widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}, \widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}) \quad (2.37)$$

如表2.3我們利用發電機葉片的可靠度資料，展示如何推估可靠度相關參數及其信賴區間，此範例的數量為70台($n = 70$)，主要分為確切破壞與右側設限兩種資料，可靠度試驗的單位為小時。預測的可靠度參數及信賴區間如表2.3，並用其參數計算出可靠度函數及95%信賴區間，如圖2.8。

表 2.2: 發電機葉片可靠度資料

時間	狀態	檢驗數量	時間	狀態	檢驗數量	時間	狀態	檢驗數量
450	Failed	1	3200	Censored	1	7450	Censored	1
460	Censored	1	3450	Failed	1	7800	Censored	2
1150	Failed	2	3750	Censored	2	8100	Censored	2
1560	Censored	1	4150	Censored	4	8200	Censored	1
1600	Failed	1	4300	Censored	4	8500	Censored	3
1660	Censored	1	4600	Failed	1	8750	Censored	2
1850	Censored	5	4850	Censored	4	8750	Failed	1
2030	Censored	3	5000	Censored	3	9400	Censored	1
2070	Failed	2	6100	Censored	3	9900	Censored	1
2080	Failed	1	6100	Failed	1	10100	Censored	3
2200	Censored	1	6300	Censored	1	11500	Censored	1
3000	Censored	4	6450	Censored	2			
3100	Failed	1	6700	Censored	1			

表 2.3: 發電機葉片可靠度推估結果

	韋伯	對數常態
參數預測值 $\hat{\mu}$	10.1772	10.1432
參數標準差 $\hat{s}e_{\hat{\mu}}$	0.4670	0.5221
95%信賴區間 $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$	[9.2618, 11.0926]	[9.1200, 11.1665]
參數預測值 $\hat{\sigma}$	0.9448	1.6796
參數標準差 $\hat{s}e_{\hat{\sigma}}$	0.2399	0.3900
95%信賴區間 $[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$	[0.5743, 1.5542]	[1.0654, 2.6478]
可靠度預測值 $\hat{F}(10000)$	0.3019	0.2893
可靠度標準差 $\hat{s}e_{\hat{F}(10000)}$	0.0807	0.0740
95%信賴區間 $[\underline{F}, \bar{F}]$	[0.1438, 0.4600]	[0.1443, 0.4343]

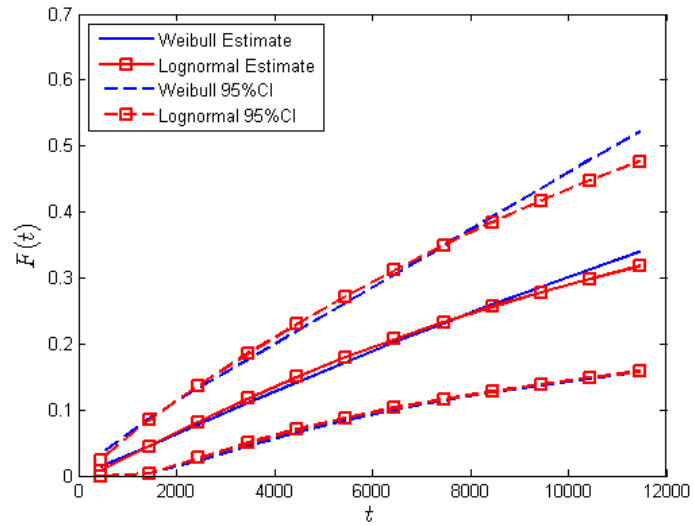


圖 2.8: 可靠度及信賴區間分佈

2.1.7 可靠度試驗樣本試件數量多寡之影響

我們知道可靠度資料的來源，是對產品的母體進行取樣本，而一組樣本裡所包含許多需要進行試驗的樣本數，從這些樣本數進行可靠度試驗及分析，就可以得到可靠度資料，而這些資料往往就決定了產品的可靠度分佈情形，但是每一次取樣的結果，預測出來的機率分佈往往不同，誤差有大也有小，此節利用一個工程範例探討樣本數與預測可靠度函數誤差之間的關係，如圖2.9所示，為一個簡易懸臂樑的安全問題，設計變數長寬高為定值，材料的楊氏係數 E 與外力 P 均為高斯分佈，如表2.4。



圖 2.9: 簡易懸臂樑

表 2.4: 懸臂樑設計參數

設計參數	範圍	單位
彈性係數(E)	$N \sim (200000, 5000)$	Pa
作用力(P)	$N \sim (21000, 3000)$	N

接著由表2.4的參數，產生出2000個懸臂樑，並進行應力分析，將所有的懸臂樑最大應力結果視為一個母體；圖2.10為所有懸臂樑分析後的最大應力分佈，橫軸為最大應力，縱軸為個數。此時假設材料的強度會隨時間而衰退，如圖2.11，為降伏強度隨時間慢慢下降，當懸

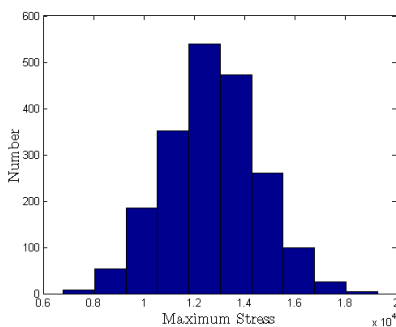


圖 2.10: 懸臂樑最大應力分佈

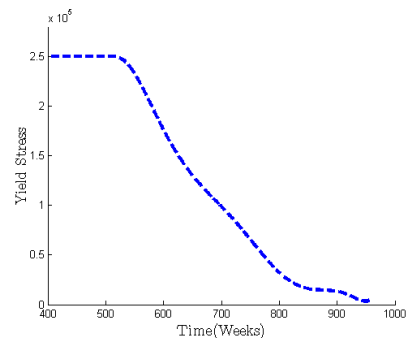


圖 2.11: 懸臂樑降伏應力隨時間改變的關係

臂樑所產生的最大應力大於等於降伏應力時，即視為破壞。進行可靠度檢驗時，如果試件已破壞視為確切破壞，未破壞則視為右側設限。

檢驗條件：假設產品需要在期間內做完檢驗的工作，因人力有限，每次檢驗只能做3個樣本數的檢查，一旦樣本數目多，檢驗的次數也隨之增加，如表2.5與2.6所示，為從母體抽樣本數30和120之可靠度檢驗情況。若樣本數為30個時需在期間內分10次的檢驗，若樣本數為120個則需分40次的檢驗。

表 2.5: 樣本數為30之可靠度資料

時間	所剩樣本數	破壞	設限
880	30	1	2
892	27	1	2
904	24	0	3
...
964	9	3	0
976	6	0	3
999	3	0	3

表 2.6: 樣本數為120之可靠度資料

時間	所剩樣本數	破壞	設限
880	120	0	3
883	117	1	2
886	144	0	3
...
967	9	0	3
970	6	0	3
997	3	0	3

接著我們從母體中重複隨機取10次樣本數為30與120來做可靠度試驗，取樣及檢驗過程如圖2.12，分別可得到樣本數30與120的10組可靠度資料，用最大似然推估其可靠度函數，並比較其結果。

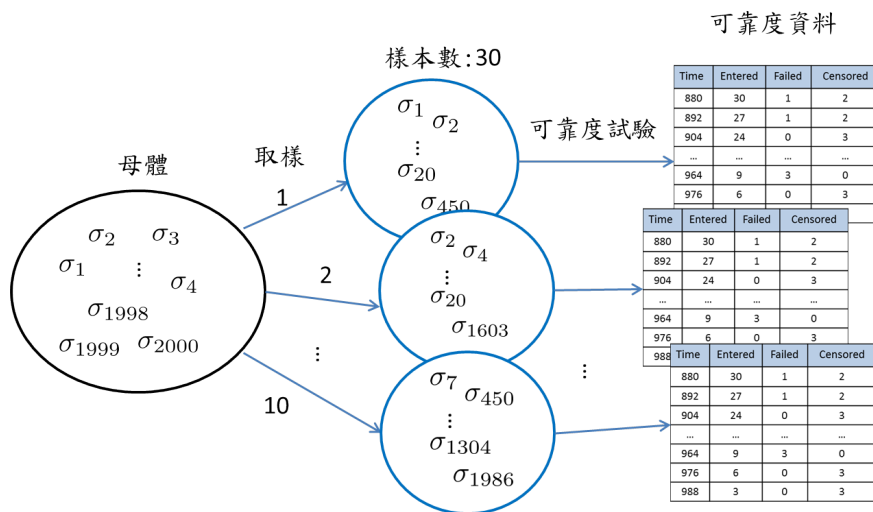
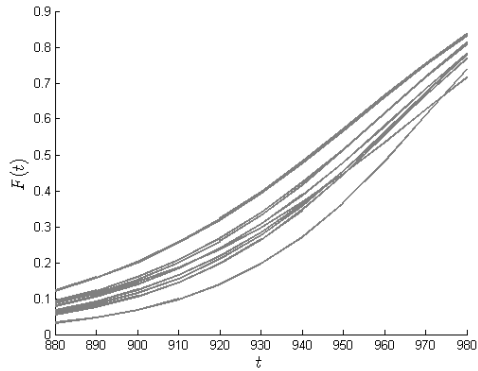
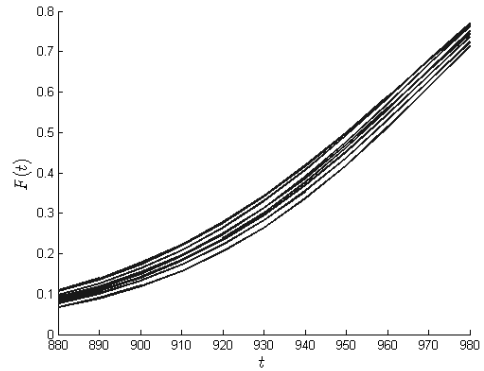


圖 2.12: 懸臂樑隨機重複取樣示意圖

圖2.13與圖2.14為取樣10次樣本數為30與120之可靠度函數及信賴區間結果比較，每次取樣便會產生一個可靠度函數結果，因此圖2.13a與圖2.13b各有10條線代表10次取樣的可靠度函數，圖2.14則為他們的95%信賴區間結果。

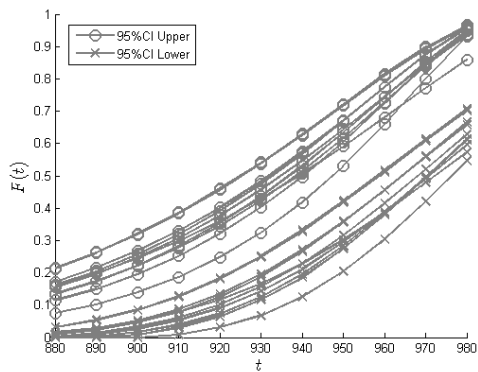


(a) 取10次樣本數為30之可靠度函數結果

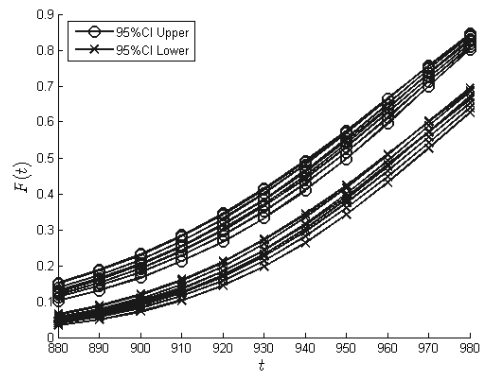


(b) 取10次樣本數為120之可靠度函數結果

圖 2.13: 樣本數不同之可靠度函數結果比較



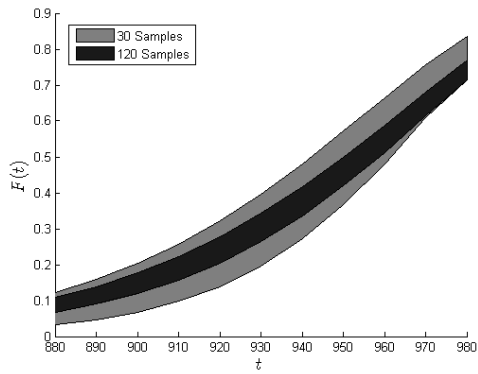
(a) 取10次樣本數為30之可靠度函數信賴區間結果



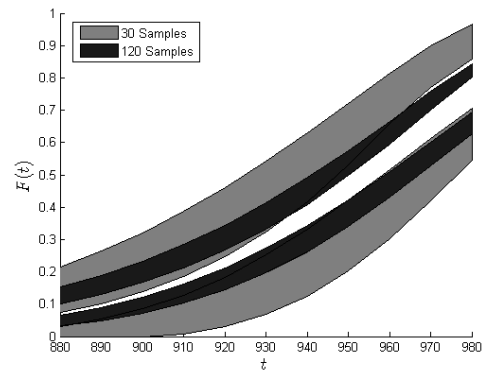
(b) 取10次樣本數120之可靠度函數信賴區間結果

圖 2.14: 樣本數不同之可靠度函數信賴區間結果比較

此時為了更明顯的比較，我們將圖2.13a與2.14不同樣本數下所涵蓋的可靠度函數及信賴區間的範圍合併，如圖2.15，為樣本數30與120之誤差比較。



(a) 樣本數30與120之可靠度函數差異



(b) 樣本數30與120之可靠度信賴區間差異

圖 2.15: 樣本數不同之可靠度差異

由圖2.15可以發現，當樣本數為30時，其可靠度函數的平均值與信賴區間比樣本數為120時變動範圍大，除此之外，樣本數120的信賴區間的範圍也比較小。所以我們似乎可以了解到，當樣本數越多其可靠度函數的預測結果變動較小，較能準確的預測產品的可靠度。

2.2 現行可靠度最佳化方法

現行的可靠度最佳化設計演算過程可統整為圖2.16的流程，先模擬不確定因素，並利用該模型計算可靠度量值，反覆運算到收斂後即可算出符合可靠度的最佳設計。

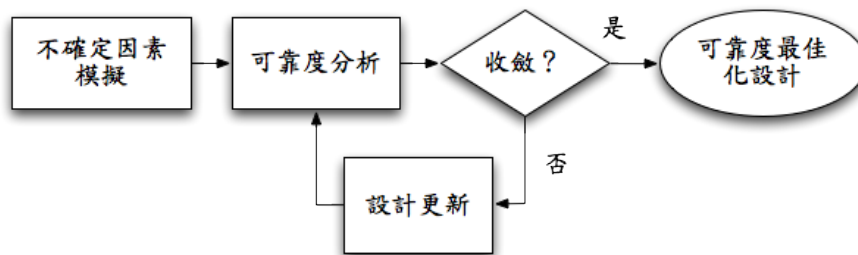


圖 2.16: 可靠度最佳化設計演算

2.2.1 不確定因素模擬

大部分可以被量測的現象都包含了不確定因素，無法預測也無可避免的，舉例來說，對某個現象在同樣的位置做反復量測，每一次量測結果可能都會不同，我們統稱影響這些結果的因素為不確定因素。在現實生活中，不確定因素四處可見，舉例來說，因為製造公差而造成產品差異，即是不確定因素的一種表現。不確定因素可區分為下列四種：

- 人為因素：產品加工時的品質、工作人員操作的差異、加工量測的精度等，受人為影響的偏差。
- 材料特性：材料的楊氏係數、密度、浦松氏比等，任何材料內部的結構變異。
- 自然環境：產品使用環境的壓力、溫度、濕度等，任何非人為的自然因素影響。
- 時間影響：產品材質的龜裂、老化、疲勞等，材質或零件隨時間的增長而改變其內部結構。

在此章節用 X 來表示不確定因素的隨機變數。其不確定因素的數學模型可參考第2.1.4節。

2.2.2 非時變隨機變數可靠度計算

一般設計問題若不考慮時間因素的影響，則以非時變性的隨機變數來模擬不確定因素對產品的影響。假設限制式為 g ，我們將其定義為 $g(\mathbf{X})$ ， $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 為影響產品之不確定素，並用隨機變數來進行模擬， $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 為這些不確定因素之聯合機率密度函數(Joint Probability Density Function)。只要當限制式結果 $g(\mathbf{X}) > 0$ 即視為破壞，因此破壞機率和可靠度機率可定義為：

$$\begin{aligned} P_f &= P_r [g(\mathbf{X}) > 0] = \int_{g(\mathbf{X}) > 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_{g > 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} R_e &= 1 - P_f = P_r [g(\mathbf{X}) < 0] = \int_{g(\mathbf{X}) < 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_{g < 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.39)$$

在計算此方程式會遇到幾個問題，首先是聯合機率密度函數幾乎不可能得到，即使得到了，還要面臨求解多重積分所構成的複雜數學問題。而計算此非時變可靠度的方法已經被廣泛的使用 [18]，以下為常用的幾個方法。

- 近似法

- 一階二次可靠度方法(First Order Second Moment, FOSM) [19]為一階可靠度方法中最簡單的一種，此方法的特色是利用泰勒級數展開式(Taylor Series Expansion)在設計點位置的拘束條件函數做一次展開，接著利用隨機變數的一次與二次統計矩陣計算設計點在標準空間與極限狀態之距離，此標準空間為平均值等於零、標準差等於一的標準高斯分佈空間，接著利用高斯隨機分佈的特性計算可靠度。

在一個高斯隨機變數 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 與拘束條件 g 的情況下，欲想計算 $g(\mathbf{x})$ 在平均值 μ_X 的破壞機率，必須先對拘束條件在平均值做一次泰勒展開，如方程式(2.40)。

$$g'(\mathbf{x}) = g(\boldsymbol{\mu}_x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} (\mathbf{x}_i - \mu_{x_i}) \quad (2.40)$$

因 $g'(\mathbf{x})$ 是原本拘束條件的線性近似，而根據高斯分佈的特性，將 \mathbf{X} 帶入 $g'(\mathbf{x})$ 後， $g'(\mathbf{x})$ 也會是一個高斯分佈，其平均值與標準差計算如方程式(2.41)

$$g'(\mathbf{X}) \sim N(\mu_{g'}, \sigma_{g'}^2)$$

$$\begin{cases} \mu_{g'} = g(\boldsymbol{\mu}_x) \\ \sigma_{g'}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \end{cases} \quad (2.41)$$

由於隨機變數為高斯分佈，所以我們可以利用高斯分佈的特性，計算 $g'(\mathbf{x})$ 的破壞機率，如方程式(2.42)，其中 β_r 定義為可靠度指標(Reliability Index)或安全指標(Safe Index)。

$$\hat{P}_f = P_r [g'(\mathbf{X}) > 0] = \Phi \left(\frac{\mu_{g'} - 0}{\sigma_{g'}} \right) = \Phi(\beta_r) \quad (2.42)$$

此方法可以很快地計算出可靠度，但是計算的拘束條件 $g'(\mathbf{x})$ 須為一次線性近似方程式，而在工程上的問題都不為線性，所以如果拘束條件不為線性時，估算的可靠度也許會相當大的誤差產生 [19]。

- 進階一階二次可靠度方法(Advanced First Order Second Moment, AFOSM)是一個利用隨機變數為高斯分佈的計算方法，由Hasofer與Lind在1974年所提出的方法 [20]，因此也被稱為H-L法，為目前最常見的可靠度分析方法。此方法的概念是藉由搜索在標準空間中距離設計點最近的拘束條件位置，則兩者之間的距離位置即為可靠度指標。

在一個高斯隨機變數 \mathbf{X} 與拘束條件 g 的情況下，想計算在平均值 μ_x 的破壞機率，須先對設計變數轉換至標準空間內，如方程式(2.43)，其中設計空間指的是 \mathbf{x} 變數的空間，以 \mathbf{u} 來代表平均值為零、標準差為一的標準空間。

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x} \quad (2.43)$$

在標準空間的原點為設計空間的平均值，由於隨機變數的標準差以標準化過，所以在標準空間中離原點越近的地方代表有越大的機率，因此在此空間相對應到拘束條件上距離原點最近的點，即有可能是破壞點(Most Probable Point, MPP)，其搜索距離最近的點，如下列方程式(2.44)。

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\| \quad (2.44)$$

subject to $g(\mathbf{u}) = 0$

由上式最佳化在設計空間找到的最佳值 $\|\mathbf{u}^*\|$ ，即為可靠度指標 β_r ，因此我們可以利用此值來計算破壞機率，如方程式(2.45)。

$$\hat{P}_f = \Phi(\beta_r) = \Phi(\|\mathbf{u}^*\|) \quad (2.45)$$

在此如同一階二次可靠度方法中使用可靠度指標來評估可靠度，如果問題中的 $g'(\mathbf{x})$ 為線性且隨機變數分佈為獨立高斯分佈，那一階二次可靠度方法與進階一階二次可靠度方法會得到相同的結果，且為真正的破壞機率。但是在非線性時，進階一階可靠度方法因經過一個最佳化過程來搜尋最大可能破壞點，讓計算出來的可靠度誤差不會像一階二次可靠度方法般的大，但相對必須付出更多的計算成本。此外進階一階二次可靠度方法在使用時，隨機變數須為高斯分佈，而有些文獻 [21-23]也提出一些方法來克服此問題。

- 樣本法(Sampling Method)：蒙地卡羅法(Monte Carlo Simulation, MCS) [6]為一般最常見的樣本法，是利用電腦大量製造符合隨機變數機率分佈的樣本點，再將這些樣本代入拘束條件來計算可靠度，與一階可靠度方法最大的不同是，它並不限制隨機變數的種類是否為高斯分佈，由於此方法的概念相當簡單，因此常被用來作驗證答案的可靠度準確方法。

假設有一個隨機變數 \mathbf{X} 與拘束條件 g ，蒙地卡羅法計算可靠度的方式，如方程式(2.46)所示，其中 \mathbf{x}_i 是從母體 \mathbf{X} 所取出的樣本，總數為 N 個樣本，而 $I_g(\mathbf{x})$ 為代表一種指標來表示樣本點的破壞與否，而最後計算破壞的機率為 \hat{P}_f 。

$$I_g(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } g(\mathbf{x}_i) > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\hat{P}_f(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_g(\mathbf{x}_i)$$

然而對一個存在於連續空間中的隨機變數 \mathbf{X} 而言，其破壞機率 P_f 的實際值應等於方程式(2.47)。

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) > 0} I_g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.47)$$

蒙地卡羅為一個很直觀的方法，它的準確性也相當好，但是為了完整的將隨機變數的特性充分展現，因此需要大量的樣本數。此外如果估計變數與此拘束條件間的最近距離相差甚遠，若直接用原分佈取樣計算可靠度時，可能需要相當大量的樣本才能

獲得所需結果，若能在較近的破壞區上取樣，即可減少樣本數，可參考 [24]，但如果仍需考慮此狀況下的取點變異，也有一些是減少變異的取點方法(Variance Reduction Techniques,VRT)，像是重要取點法(Importance Sampling,IS) [25]、半徑取點法(Radius Based Important Sampling,RIS) [26]。

2.2.3 時變隨機變數可靠度計算

時變(Time-dependent)是用來描述現象或行為受時間的改變，例如產品的材質或零件經時間長久而老化，或溫度受季節的改變，這些都是時變性的一種表現。時變隨機變數的模擬是將不確定因素的現象加入時間的改變，將其視為一個隨機過程或序率過程(Random Process,Stochastic Process) [27]，如圖2.17，我們用符號 $X(t)$ 來定義一個隨機過程， t 代表該隨機過程的時間性值或是隨機過程為一個時間函數。

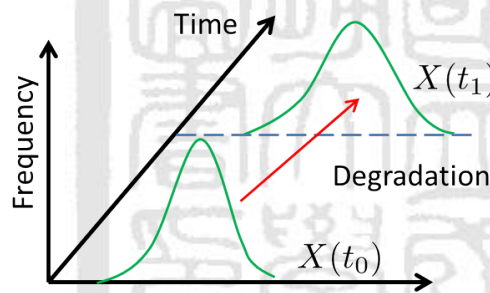


圖 2.17: 時變性不確定因素

隨機過程主要可分為幾類 [27]

- 連續時間過程(Continuous-time Process)
假設時間 $t \in R$ 為一實數且連續。
- 離散時間過程(Discrete-time Process)
假設時間 $t = n \in Z$ 為一整數且離散。
- 連續量值過程(Continuous-value Process)
假設該隨機過程 $X(t)$ 量值為一連續集合內之結果(例： $[-6 \sim 4]$)
- 離散量值過程(Discrete-value Process)
假設該隨機過程 $X(t)$ 量值為一離散集合內之結果(例： $[-3, 1, 2]$)

大致上我們把『離散時間或離散量值的隨機過程』稱為『隨機序列』(Random Sequence)，而隨機過程通常指的是『連續的時間或是連續量值的隨機過程』。在模擬工程領域上的不確定因素大都使用連續性的隨機過程來進行。而在定義一個隨機過程 $X(t)$ 之前，我們須先定義此隨機過程在所有時間點的分佈函數，對一個特定時間點 t_1 來講， $X(t_1)$ 為一隨機變數，其累積分佈函數與機率密度函數可用下列方程式表示：

$$F_X(x, t_1) = P_r[X(t_1) \leq x]$$

$$f_X(x, t_1) = \frac{\partial F_X(x, t_1)}{\partial x}$$

稱此為 $X(t)$ 的一階累積分佈函數與機率密度函數。而當出現了第二階層時間 t_2 時，其 $X(t)$ 的表示如下列所示：

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P_r[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2]$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

以此類推如果考慮了 n 階層的時間 t_n 時，此隨機過程 $X(t)$ 的累積分佈函數與機率密度函數可用方程式(2.48)和(2.49)表示：

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P_r[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (2.48)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.49)$$

此公式假設隨機過程要有足夠的連續性，而且可以利用有限階數 n 來進行計算時方可以使用。因此要定義某隨機過程 $X(t)$ ，所以需知道該隨機過程 $X(t)$ 在任何一時間點的分佈狀態。

若考慮了時變性的隨機變數 $X(t)$ ，限制式為 g ，則 $g(\mathbf{X}(t))$ ， $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ 為影響產品之時變性不確定素，同樣的用 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}(t))$ 來表示時變性不確定因素之聯合機率密度函數。而破壞的機率是計算在時間區間 $[0, t_{\max}]$ 內違反限制式所發生的機率，則破壞機率和可靠度機率可定義為：

$$P_f(t) = P_r[g(\mathbf{X}(t)) > 0] = \int_{g(\mathbf{X}(t)) > 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}(t)) d\mathbf{x}(t)$$

$$= \int \dots \int_{g(t) > 0} f_{\mathbf{X}}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) dx_1(t) dx_2(t) \dots dx_n(t) \quad (2.50)$$

$$R_e(t) = 1 - P_f(t) = P_r[g(\mathbf{X}(t)) < 0] = \int_{g(\mathbf{X}(t)) < 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}(t)) d\mathbf{x}(t)$$

$$= \int \dots \int_{g(t) < 0} f_{\mathbf{X}}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) dx_1(t) dx_2(t) \dots dx_n(t) \quad (2.51)$$

由公式可以得知，除了要計算非時變性所構成複雜數學外，還要考慮到時變性所衍生的更複雜的數學問題，因此要計算時變性隨機變數的機率函數會更為困難，故針對時變可靠度計算的方法並不多，雖然說有部分文獻探討過 [28-30]，但大部分都只能針對特定問題，而且求解之結果往往與實際結果不理想。

2.2.4 可靠度最佳化設計

最佳化設計 [2] 的意思就是在滿足所要求的限制條件下，使設計目標達到最好。以一個結構設計工程為範例，工程師在設計一座橋樑，除了達到交通運輸外，也必須確保橋樑本身的強度是否可以抵抗一些外力負載，以確保不會發生破壞的危險，同時又希望以花費最少成本去完成此座橋樑，在這樣的設計問題中，抵抗外力負載的要求是必須滿足的限制條件，花費最少成本便是其目標。這樣的問題我們可以用方程式(2.52)來代表一般最佳化問題，由目標函數 $f(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 和非等式限制 $g(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 所組成，其中 \mathbf{x} 為設計者可以控制的設計變數，例如橋樑的尺寸； \mathbf{q} 為設計者無法決定的設計參數，例如橋樑所在的環境溫度及濕度。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \\ \text{s.t.} \quad & g(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

但是在最佳化設計中，即使是設計時分析後的結果顯示產品滿足在所要求的限制內，在現實生活中，卻無法符合真正的限制要求，舉例來說，在設計橋樑的最佳化時，我們制定拘束條件為橋樑結構強度可以抵抗外力負荷，那橋樑就一定不會壞嗎？答案是否定的，因為世界上沒有不會壞掉的東西，而會造成這樣的矛盾的結果，都是來自於不確定因素。

在過去經驗上，工程師為了解決不確定因素的問題，往往都採用制定安全係數來處理，訂定比原先預期較高的標準，為了就是避免不確定因素導致產品失去效能，但是制定過高的標準，往往會導致成本過高或是產品其他效能降低，因此工程師在制定安全係數的經驗或資訊不足時，很容易做出錯誤的決定；此時可以利用統計的概念來了解不確定因素發生機率，使工程師做出更好的判斷，因此便需要對產品進行可靠度的評估。可靠度為評估不確定因素影響產品效能的重要指標。在最佳化設計的過程中，為了將不確定因素的影響加入考量，於是在工程上發展出了可靠度最佳化設計(Reliability-Based-Design-Optimization) [3]，簡稱RBDO。可靠度最佳化設計為一種結合可靠度考量的最佳化設計方法，要求在滿足含有不確定因素的限制條件下，將設計目標最佳化，把原本最佳化的問題中當作定量值(Deterministic)的設計變數與參數，用某種隨機的機率分佈取代，來表現不確定因素對設

計的影響，因此將方程式(2.52)改成(2.53)，成爲一般可靠度最佳化數學式。其中 \mathbf{X} 和 \mathbf{Q} 爲設計變數與參數的隨機分佈， μ_x 與 μ_q 爲設計變數與參數的期望值。式子中 P_f 爲違反拘束條件的機率上限，若將違反限制條件的情況稱爲破壞，則 P_f 便可稱爲破壞機率，繼而將可靠度 R_o 定爲 $1 - P_f$ 。

$$\begin{aligned} \min_{\mu_x} \quad & f(\mu_x, \mu_q) \\ \text{s.t.} \quad & P_r [\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) > 0] \leq P_f \\ & \mu_x^{\text{LB}} \leq \mu_x \leq \mu_x^{\text{UB}} \\ & \mathbf{X} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \end{aligned} \quad (2.53)$$

可靠度最佳化問題中因目標函數具有隨機變數與參數，跟一般最佳化相比較難評估數值，所以需要一個具有代表性數值代表目標函數，一般用期望值表示。而限制條件也包含了不確定的隨機變數與參數，以至於限制條件的結果沒有一定的違反與滿足，故須制定某機率界限以判定限制條件是否滿足。換言之可靠度最佳化便是將機率的觀念引進限制條件中，要求滿足限制條件的機率不可以低於設計者的要求。

2.3 文獻討論

從文獻的探討中，我們把產品可靠度的評估方法總結如下

- 可靠度量測

針對開發出來的新產品之使用壽命進行實際的量測及可靠度試驗，而將試驗所得到的可靠度資料結果進行可靠度推估，若發現產品在初期檢驗時的可靠度未達標準，則會改善產品的設計且重新進行量測及試驗，直到該產品到達預期的可靠度爲止。爲了讓產品壽命達到一定的標準，這些量測及試驗的過程往往需要耗費許多昂貴資源及時間，而有些產品的使用可能涉及到生命安全，所以這樣的過程是必須且不可忽略的。

- 可靠度最佳化設計

如果不考慮時間的因素，我們可以利用一般的可靠度分析方法來求解最佳設計的問題，即爲可靠度最佳化設計，最終求得之結果，爲該產品在所有限制條件及不確定因素影響下的極致表現。但是在可靠度最佳化的數學式(2.53)的限制式中，並無考慮到不確因素受時間的影響，如材質老化。而如果考慮了時變性的不確因素，在進行可靠度分析時，除了要面臨計算非時變不確定因素所帶來的多重積分複雜數學外，還

要計算由非時變不確定因素所衍生出時變不確定因素所構成的更困難數學問題，如第2.2.3節，而如果再將時變可靠度加入最佳化的模擬，似乎是一件困難的事，雖然有些文獻有探討過 [31]，但大部分都只解決固定類型的時變可靠度最佳化問題。

從兩個方法來看，由可靠度最佳化設計的結果我們可以設計出一個新產品在不受時間影響的極致表現，但是其產品隨時間而改變的性能及可靠度則無法得知。加入時間的因素來進行模擬可靠度最佳化設計的過程往往是複雜且難解的，所以此產品要定義時間上的可靠度，還是必須經過實際的可靠度量測才行。

因此本論文希望能夠透過產品實際測量得來的可靠度資訊，來佐證電腦模擬可能帶來的誤差，進而發展一套方法可以在時間與可靠度的限制下求得產品的最佳設計。



第三章 研究方法

3.1 可靠度函數反應曲面

要評估一項產品的可靠度情形，必須從可靠度資料著手，而可靠度資料的來源是必須經過很多繁雜的過程，從產品的設計雛形產生、量化生產、抽樣、可靠度試驗，而這些過程往往都是最耗費資源的，本論文的研究方法是將這樣的過程建構一個反應曲面，如圖3.1虛線區域內所示，如此一來，只要有了新的設計雛形，就可以預測它的可靠度函數分佈，以節省這段昂貴的量測過程。

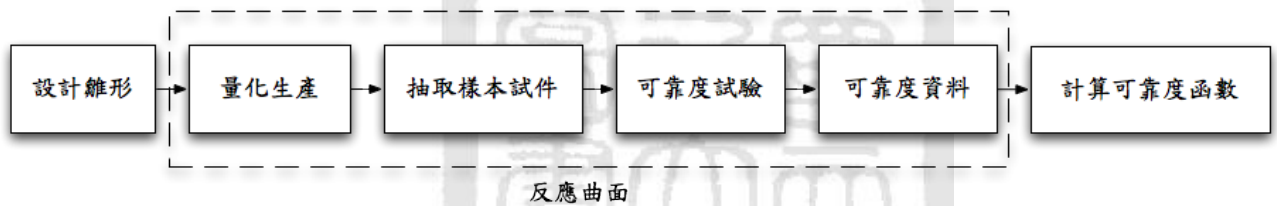


圖 3.1: 產品可靠度評估過程

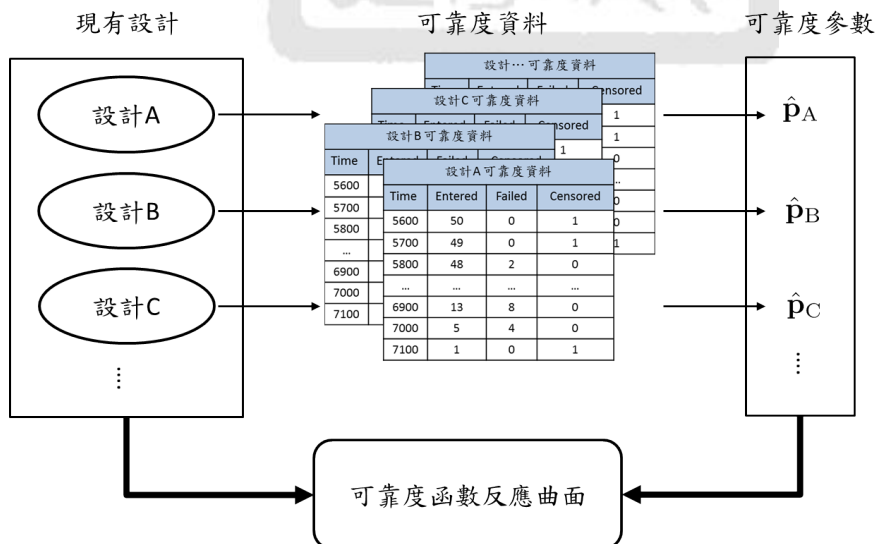


圖 3.2: 可靠度函數反應曲面建構

而要建構一個反應曲面，需要很多樣本點 $\{x_\alpha : \alpha = 1, \dots, n_s\}$ 與其量測值 $\{g_\alpha : \alpha = 1, \dots, n_s\}$ ，如圖3.2所示，一個產品將它的可靠度資料分析後可以得到相關的可靠度參數，

但是如果有另一個或更多個相關系列產品，但設計上不一樣，也有它們分別的可靠度參數，利用他們的差異性去尋找一個已有設計但未生產產品的可靠度參數，此時，產品的設計變數就是樣本點 \mathbf{x}_α ，相對於產品的每一組可靠度參數 $\hat{\mathbf{p}}_\alpha$ 則視為量測值 g_α ，以韋伯分佈舉例，其可靠度函數相關的參數為位置參數 $\hat{\mu}$ 及位置參數變異數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 、尺度參數 $\hat{\sigma}$ 及尺度參數變異數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 和位置參數與尺度參數的共變異數 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ ，有了這些設計與可靠度參數的關係，就可以建構一個跟時間相關的可靠度函數反應曲面。將這個跟設計有關的可靠度函數反應曲面用符號 \mathcal{F} 表示，其方程式為(3.1)。

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{F}} &= \left[\underline{F}, \hat{F}, \overline{F} \right] \\
 &= \hat{F} \pm z_{1-\beta/2} \hat{s}e_{\hat{F}} \\
 &= \hat{F}(t, \hat{\mu}(\mathbf{x}), \hat{\sigma}(\mathbf{x}) \pm z_{1-\beta/2} \hat{s}e_{\hat{F}}(t, \hat{\mu}(\mathbf{x}), \hat{\sigma}(\mathbf{x}), \widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}(\mathbf{x}), \widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}(\mathbf{x}), \widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}(\mathbf{x})) \\
 &= \mathcal{F}(t, \beta, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x}))
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 t 為時間， β 為信賴區間的指標， $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ 為與設計相關的可靠度參數。由方程式發現，可靠度函數模型是由可靠度函數與信賴區間所構成的，若不考慮信賴區間的問題，此模型的可靠度參數就只需要 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 。

而我們必須針對可靠度函數反應曲面的需求，才能選用適當的反應曲面法來建構，則需求如下：

- 高效率

一個反應曲面大都只描述一個輸出，而要描述一個可靠度函數需要的參數不止一個，必須是兩個以上或多個參數(如 $\hat{\mu}, \hat{\sigma} \dots$)，簡單來講，可靠度函數反應曲面法是由多個可靠度參數反應曲面所構成的，所以在建構多個反應曲面上可能會比較耗時，故此反應曲面在建構模型上效率要夠好。

- 高維度

一個產品的設計變數代表可靠度函數反應曲面的輸入值，產品的設計變數往往是很多個，例如腳踏車的尺寸外型，所以在建構可靠度函數反應曲面時，也要能夠處理多維度變數的輸入系統。

- 重現實際結果

由於每個成形的產品經過壽命評估後，從得來的可靠度資料經最大似然法計算後，其推估出來的可靠度參數，就決定了此產品的可靠度函數分佈，所以再針對成型的產品進行可靠度函數預測，必須是等於當初已量測過的結果，不得有任何誤差。

- 與實際誤差程度

在利用反應曲面取得可靠度近似值，工程師也需要了解此近似值的準確或不準確，也就是說此反應曲面不僅能提供預測之可靠度，也要提供此預測之精確範圍。

3.2 反應曲面法

反應曲面法(Response Surface Methodology, Surrogate)是一種結合數學應用、實驗設計與統計分析的方法，主要用來探討輸入值與輸出值之間的數學模式關係，可以幫助研究人員在科學領域或工業製程中進行分析產品的最佳設計 [32]、製程改善、系統最佳化問題等。目前常見的反應曲面法有回歸分析(Regression Analysis)、類神經網路(Artificial Neural Network, ANN)、Kriging反應曲面，本章將針對這三種反應曲面，探討各自優缺點與3.1節可靠度函數反應曲面特性之吻合程度。

3.2.1 回歸分析

回歸分析 [33]為統計學上對數據進行分析的方法，他是依據數據的輸入值與輸出值之間的關係來預測數據的未來發展趨勢。常見的回歸分析法有一元線性回歸、多元線性回歸和非線性回歸。

- 一元線性回歸

指數據發展的輸入值與輸出值呈簡單線性關係，其數學模型可表示為

$$\hat{y} = a + bx \quad (3.2)$$

其中 \hat{y} 預測值， x 是輸入， a 是常數， b 是回歸系數，為線性回歸中最簡單的模型，因為輸入與輸出的因素少，所以在建構模型的過程中，較容易也減省時間，但是此模型的誤差相對高，所以應用性不高。

- 多元線性回歸

指多個輸入值與一個輸出值呈線性關係。此數學模型為：

$$\hat{y} = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \quad (3.3)$$

其中 \hat{y} 為預測值， x_1, x_2, \dots, x_n 是輸入， a 是常數， b_1, b_2, \dots, b_n 是回歸係數，多元線性回歸為線性回歸中較複雜的模型，雖然輸入因素多，不過還是呈現簡單線性，所以在建構模型所耗費時間也不多，但是如果用此模型預測非線性程度較高的系統，誤差相對還是比較高，不過因為是多維度輸入的關係，應用方面較一元線性回歸來得好。

- 非線性回歸

指多個輸入值與一個輸出值的關係，是用非線性模型來預測。數學模型如下

$$\hat{y} = f(x_i, \mathbf{k}) \quad (3.4)$$

其中 \hat{y} 為輸出值和預測值， x_i 是輸入值， \mathbf{k} 為函數的參數， $f(x_i, \mathbf{k})$ 可以是二次曲線、三次曲線、冪函數、對數函數等，任何非線性函數，為回歸分析中較常見的複雜模型。在實際的問題中，當輸入值與輸出值間的關係不是線性時，就不能用線性回歸來描述它們的關係，得選用非線性函數來進行預測，但是非線性的模型較複雜，所以建立模型需耗費較多的時間，而選用此模型來預測非線性較高的系統，誤差比較低，應用方面也比線性回歸來得廣。

3.2.2 類神經網路

類神經網路 [34]起源自1950年代，科學家仿照人類大腦的組織及運作方式而建立的一個模型，人類的大腦由許多神經細胞(Nerve Cells)所構成，其結構是由神經核(Soma)、軸突(Axon)、樹突(Dendrites)和突觸(Synapses)所組成，樹突為接受外部輸入的接受器，當外部神經脈衝高於某個門檻值時，神經元會被激發，並產生一個新的神經脈衝至軸突。突觸是神經與神經之間的連絡點，若新的脈衝通過是一個興奮突觸(Excitatory Synapse)時，則會增加脈衝的速率，若通過的是抑制突觸(Inhibitory Synapse)，則會減少脈衝的速率。所以影響神經元的學習的關鍵，在於如何轉換外部的刺激成為新脈衝，以及突觸的強度。以生活為例，興奮突觸的表現就好比當手觸摸熱物體立即放開。而抑制突觸可能是大腦受到損害，無法做出適時的反應，如中風患者，因此便需要藉由復健的方式重新學習。類神經網路的運作便源於此，透過不同的演算方法訓練類神經網路使其能夠到所要求的目標。

在工程領域中，若要準確的分析輸入與輸出的關係，則必須將系統用數學的方式建立模型。但是系統往往是複雜且非線性的，因此如何以數學的方式簡化系統，是工程領域上的一大課題。而類神經網路的優點在於不需要了解系統的數學模型為何，而直接用類神經網路取

代系統模型，得到輸入與輸出的關係，如圖3.3，為類神經網路的仿效人類神經元的架構。其數學模型如方程式(3.5)。

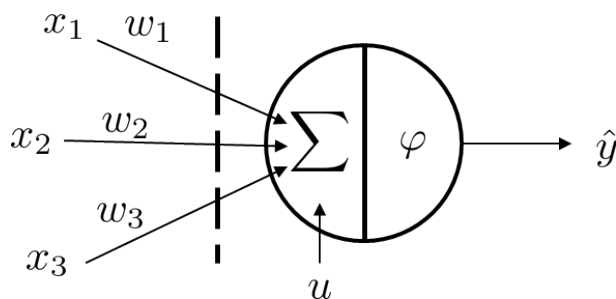


圖 3.3: 類神經元架構

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + u \right) \quad (3.5)$$

其中 x_i 為輸入值， w_i 為輸入值的權重，類神經網路的訓練就是在調整其權重，使其變更大或是更小，當 x_i 乘上 w_i 就等於外部輸入的神經脈衝，在通過樹突時，神經脈衝必須大於門檻值才能傳遞至神經元。 u 為神經元本身的常數項，有調整的效果。當脈衝通過樹突進入神經元後，透過加總函數 \sum 把所有神經脈衝累加，再透過活化函數 φ (Activation Function)的方式，產生新的神經脈衝 \hat{y} 向外傳遞。

類神經網路主要是透過修正權重的方式，使得輸出值能夠接近實際值，反覆的調整權重，讓誤差降低，整過程為類神經網路的『學習』。

類神經網路所帶來的優缺點如下

- 優點

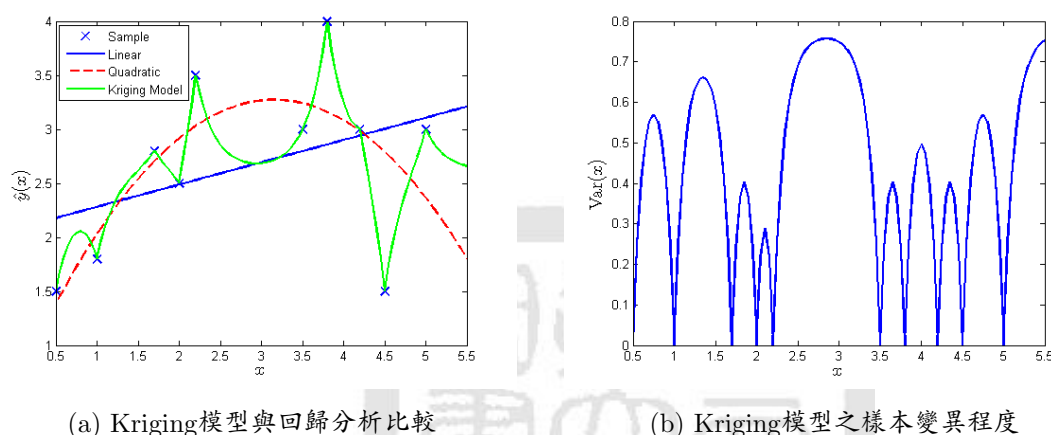
- 適合建構非線性模型，所以準確性高。
- 可以接受不同種類的變數作為輸出，適應能力強。

- 缺點

- 用迭代的方式更新權重值與門檻值，計算量大，耗費時間。
- 求解的結果，有無限多組，無法得知哪組為最佳解。
- 在訓練的過程中無法得知需要多少的神經元，太多或太少的神經元均會影響系統的準確性，往往需要用試誤的方式得到最適當的神經元數。

3.2.3 Kriging模型

Kriging模型 [35-37]為地質統計學上一種空間資料內插處理方法，主要的目的是利用各資料點間變異量的大小來推求某一預測值的與各已知值的權重關係。Kriging模型優勢是可以不受模型的複雜度影響，利用變異圖(Variogram)的分析方法針對資料點間的特性做模型擬合，而且建模速度快，分別解決了回歸分析中線性誤差大和非線性耗時兩項缺點，以及類神經結構複雜計算困難的問題。



(a) Kriging模型與回歸分析比較

(b) Kriging模型之樣本變異程度

圖 3.4: 不同反應曲面之比較

如圖3.4a，為回歸分析與Kriging模型比較，可以發現Kriging模型會經過所有樣本點，且預測點的位置若離已知點越近則預測的結果會越接近已知值，甚至若直接預測已知點的結果它會同等於已知值，而用回歸分析的線性與二次式模型都還是有誤差，而這個誤差的特色也反應在可靠度函數模型，一個已知點代表著一個已成形的產品，而每個成形產品的使用壽命或是可靠度，其背後都是經過繁雜的實際量測及評估所得來，而如果再對這項產品的使用壽命或是可靠度保有質疑或誤差的話，那或許就不需要進行可靠度量測這部份了，這也是本論為何要選用Kriging模型作為反應曲面的最大原因了。此外Kriging的特色不僅可以對未知點進行預測，還可以計算此未知點跟已知樣本點的變異程度，如圖3.4b，變異的程度隨著越靠近樣本位置會越小，反之離樣本越遠則變異程度越大。有些文獻比較了Kriging模型其他反應曲面法 [38]。

因此將於Kriging模型的特色與可靠度函數反應曲面符合的要求如下

- 預測已知點的結果會同等於已知值，針對成型的產品進行可靠度函數預測，其預測結果等於當初已量測過的結果，有零誤差的表現。
- 不受系統複雜度的影響，皆可進行模型預測，且建立模型速度快，可解決可靠度函數反應曲面需同時建構多個可靠度參數反應曲面的耗時問題。
- 可以藉由Kriging模型的變異數，來了解預測點與其他已知點的變異程度，如圖3.4b，當預測點離已知點越近變異數會越小，反之則越大。

關於Kriging模型的概念與推導，我們將在第四章作詳細的介紹。

3.3 時變可靠度最佳化設計

一般在可靠度最佳化設計問題中，通常不考慮時間的不確定因素，如方程式(3.6)。

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mu_x} f(\mu_x, \mu_q) \\
 & \text{s.t. } P_r [g(\mathbf{X}, \mathbf{Q}) > 0] \leq P_f \\
 & \mu_x^{\text{LB}} \leq \mu_x \leq \mu_x^{\text{UB}} \\
 & \mathbf{X} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

當有了可靠度函數反應曲面(3.1)後，我們可以將RBDO的方程式改寫如下，將此方程稱為“時變可靠度最佳化設計”(Time-dependence Reliability-Based-Design-Optimization)：

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \\
 & \text{s.t. } \mathcal{F}(t, \beta, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{q})) \leq F' \\
 & t^{\text{LB}} \leq t \leq t^{\text{UB}} \\
 & \mathbf{x}^{\text{LB}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{UB}}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

f 為目標函數， \mathbf{x} 為設計變數， $\hat{\mathbf{p}}$ 為設計變數的可靠度參數， \mathcal{F} 為可靠度函數模型， F' 為可靠度函數的限制值， β 為信賴區間因子， t 為時間變數， t^{LB} 與 t^{UB} 為時間限制範圍，意旨希望能在在此時間範圍內找到符合可靠度的最佳設計解。 $\mathcal{F}(t, \beta, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}))$ 為一個包含設計變數與參數的可靠度函數反應曲面，亦本論文所開發重點之一。

3.4 演算流程

從時變可靠度最佳化數學式來看，必須先從現有設計及可靠度參數去建構一個可靠度函數模型，才能找到最佳設計及相關的可靠度函數，此演算的流程如下。如上圖，時變可靠度

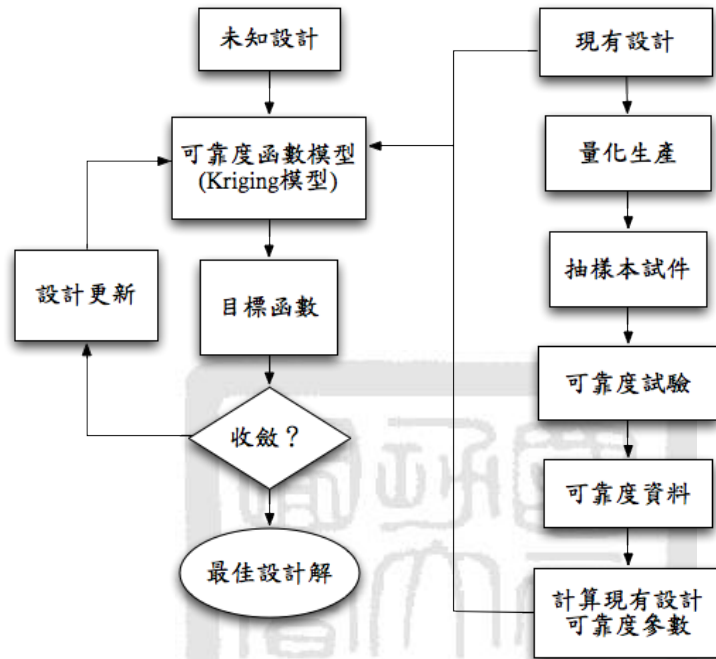


圖 3.5: 時變可靠度最佳化設計演算

最佳化設計主要目的是希望能針對一群已成型的產品的設計，且每個產品都經過可靠度試驗，從每個產品的可靠度資料經過最大似然法估算後可得可靠度參數，將產品的設計與相對應的可靠度參數建構出一個可靠度函數反應曲面，此反應曲面包含了每組設計與相關的可靠度函數，因此只要給予一組設計就能找到相關的可靠度函數，反過來講，只要給予可靠度參數我也可以找到相對應的設計，因此只要給予一個可靠度函數的限制式，我們就能從這個限制條件再經過反應曲面去找出符合限制式的最佳解，演算的過程主要分為幾個步驟：

- 1 針對空間的變數進行取樣，將每一個取樣視為一個產品的設計，並取得所有設計的可靠度資料，可靠度資料的來源必須先經過可靠度量測。可靠度量測的過程包括：設計雛形→量化生產→抽樣本試件→可靠度試驗→可靠度資料，計算每組設計的可靠度資料進而得到現有設計的可靠度參數。
- 2 將現有設計視為輸入變數，而現有設計可靠度參數視為輸出變數，建構一個跟設計相關的可靠度函數反應曲面。

3 根據目標函數及可靠度和時間的限制條件，進行最佳化的求解。

4 檢查此設計的可靠度函數有無收斂，收斂則找到最佳解，否則回到第三步驟。

而本論文將會在第五章的工程範例來展示這些演算過程。



第四章 Kriging反應曲面法

Kriging模型法最早起源自南非採礦工程上的應用，由南非的礦冶工程師Krige在1951年為探查南非的礦脈分佈所發展 [39]，之後於1970再經由法國的數學家Matheron研讀過Krige的研究論文後，發現地理統計的應用與發展性，因此提出了區域化變數理論來做為地理統計學(Geostatistics)的基礎，地理統計又稱為空間統計(Spatial Statistics)，為了紀念Krige的貢獻，而將此方法命名為Kriging模型推估法。Kriging模型主要應用於空間變異的分析與空間變異的預測，對於空間具有相關特性的變數，如何在有限的樣本數據下，建立該變數在特定範圍內某種自然現象變異程度的預測模型。近年來地理統計已經廣泛的被應用在環境工程、生態、礦業、水文、土壤、人文等空間研究領域的分析。Matheron因此被人稱為地理統計學的開創者，其生平可參考 [40]。關於更多Kriging的起源與歷史，可參考 [41]。

到了1980年代末，Kriging模型開始被應用到電腦的實驗模擬(Computer Experiments) [42]，做為反應曲面法的應用，而這種結合實驗室設計與Kriging模型來預測輸入與輸出的關係方法，後來被稱為DACE(Design and Analysis of Computer Experiments) [43]。漸漸的，Kriging模型開始廣泛的被應用在各種解決工程領域的問題上，如剛性薄板設計 [36]、熱流通道散熱孔設計 [37]及儲水壓力桶設計 [35]等。

4.1 Kriging模型

4.1.1 Kriging理論架構

Kriging模型的概念是利用各量測點間的自然性來建構模型的方法，例如想在某個區域內觀察一種自然現象的趨勢或分佈，如氣候溫度、懸浮微粒、二氧化碳、雨量等，我們做法會在不同的位置取樣量測這些自然現象，然後根據這些取樣所收集到的數據，利用空間內插處理的方法，去預測這段區域內未經過取樣位置的預測值，如圖4.1， o 為取樣點、 x 為欲預測位置。

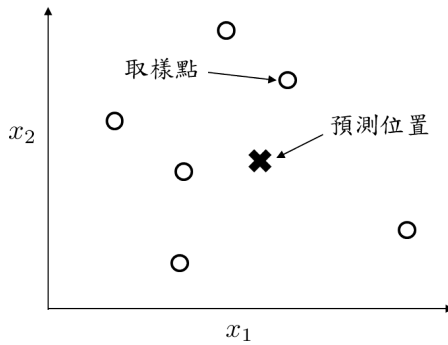


圖 4.1: 取樣與預測位置示意圖

假設我們取樣了 n_s 的樣本點，得到的量測值為 g_α ，未取樣的函數預測值為 \hat{g} ，Kriging 模型的基本的概念為預測值為所有量測值的線性權重組合，如方程式(4.1)。其中 λ_α 為一組線性權重的組合，隨著樣本位置與預測位置的不同而產生不同的權重，對於Kriging模型來說，只要決定了這組權重值就可以知道取樣與預測之間的關係。

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n_s} \lambda_\alpha(\mathbf{x}) g_\alpha \quad (4.1)$$

在實際的情況中，我們可以知道在同樣的位置中，反覆量測自然現象的量測值，並不會每一次的結果都是相同的，此量測值會是一個隨機函數，這樣的現象我們稱之為序率過程(Stochastic Process)，而如果此隨機函數各個位置間呈現多變量高斯分佈(Multi Gaussian Distribution)，則可以說這樣的自然現象為一個高斯過程(Gaussian Process)，如圖4.2，粗實線為平均值，細實線為在某個位置的分佈。雖然 Kriging 並不假設本身為某種形式的隨機過程，為求概念簡明我們都將Kriging模型假設為高斯過程來進行說明。

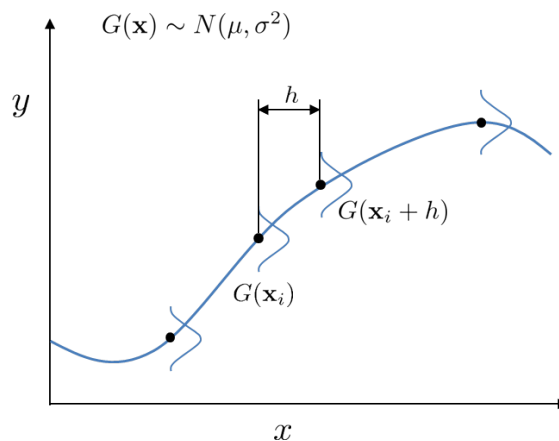


圖 4.2: 高斯過程示意圖

對於一個包含高斯過程的函數 $G(\mathbf{x})$ ，我們將它分成定率(Deterministic)與序率(Stochastic)兩部份，如方程式(4.2)，定率部份為回歸函數 $y_j(\mathbf{x})$ 與回歸係數 β_j ，序率部分的 $Z(\mathbf{x})$ 是一個平均值為零、標準差為 σ_Z 的高斯分佈，也可視為一個偏差值(Departure)。

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \beta_j y_j(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

地理統計上是以區域化變數理論作為基礎，研究那些自然現象在空間中的結構性與隨機性，如圖4.2，假設兩個距離相差 h 的隨機函數分別為 $G(\mathbf{x}_i)$ 和 $G(\mathbf{x}_i + h)$ ，其相對應的偏差值為 $Z(\mathbf{x}_i)$ 和 $Z(\mathbf{x}_i + h)$ ，如果 h 是一個很小值，Kriging理論認為如果在 \mathbf{x}_i 位置的偏差值很大，那麼就可以合理的認為在 $\mathbf{x}_i + h$ 位置的偏差值也會很大，因此區域化變數理論認為在一隨機過程中的兩個不同位置的偏差值關係，會與兩者間的距離有關，與所在位置無關。假設在地理統計學中空間只取一對樣本量測值 $Z(\mathbf{x}_i)$ 與 $Z(\mathbf{x}_i + h)$ ，不再對空間中的同樣位置重複取樣，而針對這樣的問題，統計學家提出對於隨機函數兩種基本假設，分別為泛用平穩假設(Wide-sense Stationary Hypothesis)與本質假設(Intrinsic Hypothesis)，如下所述：

- 泛用平穩假設：當一個隨機函數滿足下列三個條件則滿足泛用平穩假設

1. 在不同位置隨機函數的期望值為一定值。

$$E[G(\mathbf{x})] = m \quad (4.3)$$

2. 在不同位置隨機函數的變異數為一定值。

$$\text{Var}[G(\mathbf{x})] = E[G(\mathbf{x})^2] = E[Z(\mathbf{x})^2] = \sigma_Z^2 \quad (4.4)$$

3. 空間中任意兩個位置之隨機函數的共變異數(Covariance)只與兩點間的相對距離有關，與其所在位置無關

$$\begin{aligned} \text{Cov}(G(\mathbf{x}_i), G(\mathbf{x}_j)) &= \text{Cov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) \\ &= E[(Z(\mathbf{x}_i) - m)(Z(\mathbf{x}_j) - m)] = C_1(h) \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $h = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ ， $C_1(h)$ 為一個與距離有關之函數。

- 本質假設：

1. 空間中任意兩個位置之隨機函數，其之間差值的期望值為兩個位置之間的距離函數，與其所在位置無關

$$E[G(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_j)] = C_2(h) \quad (4.6)$$

2. 空間中任意兩個位置之隨機函數，其之間差值的變異數為兩個位置之間的距離函數，與其所在位置無關

$$\text{Var}[G(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_j)] = E[(G(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_j))^2] = C_3(h) \quad (4.7)$$

其中 $h = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ ， $C_2(h)$ 與 $C_3(h)$ 僅代表兩個與距離有關之函數。

4.1.2 Kriging公式推導

此公式推導可參考 [44]。假設在空間中的自然現象表示成方程式(4.2)，其中 $y_j(\mathbf{x})$ 為回歸函數、 β_j 為迴歸係數，用 k 個方程式來組成這個回歸函數可以表示成下列 $k \times 1$ 矩陣，以及相對應回歸係數矩陣，可以將方程式(4.2)改寫成方程式(4.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \left[y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \dots, y_k(\mathbf{x}) \right]^T \\ \boldsymbol{\beta} &= \left[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \right]^T \\ G(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + Z(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

假設取 n_s 個樣本點，分別為 $\{\mathbf{x}_\alpha : \alpha = 1, \dots, n_s\}$ ，所得到的量測值分別為 $\{g_\alpha : \alpha = 1, \dots, n_s\}$ ，將這些樣本結果代入方程式(4.8)可得到下列方程式(4.9)，根據假設，我們將此關係式視為一個實際存在的函數。

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\mathbf{x}_1) & y_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & y_k(\mathbf{x}_1) \\ y_1(\mathbf{x}_2) & y_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & y_k(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1(\mathbf{x}_{n_s}) & y_2(\mathbf{x}_{n_s}) & \cdots & y_k(\mathbf{x}_{n_s}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z(\mathbf{x}_1) \\ Z(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ Z(\mathbf{x}_{n_s}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z} \quad (4.9)$$

如方程式(4.1)，Kriging模型的基本假設為樣本點量測值的線性權重組合，稱為Kriging Estimator，如方程式(4.10)

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{g}_\alpha \\
&= \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{Z}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

接下來我們要進行Kriging模型的公式推導，所使用的概念為最佳線性無偏估計法(Best Linear Unbiased Estimation, BLUE)，在推導的過程中，主要分為兩個步驟，第一步驟為無偏差(Unbiased)，令Kriging模型具有無偏差的性質，將真實函數方程式(4.8)與Kriging Estimator方程式(4.10)的期望值相等，可得到方程式(4.11)作為無偏差的拘束條件，當線性組合的權重滿足此方程式時，Kriging模型就具有無偏差性質的預測值。

$$\begin{aligned}
E[\hat{g}(\mathbf{x})] &= E[G(\mathbf{x})] \\
E[\boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{Z}] &= E[\mathbf{y}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + Z(\mathbf{x})] \\
\boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{y}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} \\
\mathbf{y}_\alpha^T \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.11}$$

在進行第二步驟推導之前，我們由平穩假設的所得到的方程式(4.5)，將兩個隨機函數的共變異數方程式定義成下列方程式(4.12)， $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 為空間相關函數(Spatial Correlation Function)，為了推導過程方便，先將此方程式視為一個已知的函數，其內容將在下一小節說明。

$$E(Z(\mathbf{x}_i)Z(\mathbf{x}_j)) = \text{Cov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) = \sigma_Z^2 R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.12}$$

第二步驟是要將估計誤差的均方(Mean Square Error)最小化，將真實函數與Kriging Estimator的均方誤差列出，為簡化符號，我們將 $\boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x})$ 省略為 $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ ，如下

$$\begin{aligned}
E[\hat{g}(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})]^2 &= E[\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{g}_\alpha - G(\mathbf{x})]^2 \\
&= E[\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\alpha^T \boldsymbol{\lambda}_\alpha - 2\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{g}_\alpha G(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})^2] \\
&= E[\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T (\mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}) (\mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}) \boldsymbol{\lambda}_\alpha - 2\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T (\mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}) (\mathbf{y}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + Z(\mathbf{x})) \\
&\quad + (\mathbf{y}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + Z(\mathbf{x}))^2] \\
&= (\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{y}_\alpha \boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\beta})^2 + \sigma_Z^2 \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha + \sigma_Z^2 - 2\sigma_Z^2 \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) \\
&= \sigma_Z^2 (\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha + 1 - 2\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{r}(\mathbf{x})) \\
&= \hat{\sigma}_g(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 \mathbf{R}_α 為取樣與取樣之間的空間相關函數矩陣，矩陣大小為 $n_s \times n_s$ ， $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 為取樣與預測位置的空間相關函數矩陣，矩陣大小為 $n_s \times 1$ ，分別如下

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n_s}) \\ R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ R(\mathbf{x}_{n_s}, \mathbf{x}_1) & \cdots & & R(\mathbf{x}_{n_s}, \mathbf{x}_{n_s}) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ R(\mathbf{x}_{n_s}, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

此時為了符合最佳線性無偏差估計，分別將方程式(4.13)做為目標函數，方程式(4.11)作為拘束條件，要在無偏差的拘束條件下，令估計誤差的均方最小化，因此可以將此問題寫成一般最佳化形式，如方程式(4.15)。

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_\alpha} \quad & \sigma_Z^2 (\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha + 1 - 2\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{r}(\mathbf{x})) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y}_\alpha^T \boldsymbol{\lambda}_\alpha = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

方程式(4.15)的最佳化問題可用拉格朗日方程式(Largrange Function)(4.16)來求解，其中 ν 為拉格朗日因子(Largrange Multipliers)。

$$L_\nu = \sigma_Z^2 (\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha + 1 - 2\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{r}(\mathbf{x})) + 2\nu [\mathbf{y}_\alpha^T \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \mathbf{y}(\mathbf{x})] \quad (4.16)$$

將拉格朗日方程式對 λ_α 微分可得

$$2 [\sigma_Z^2 \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha - \sigma_Z^2 \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{y}_\alpha \nu] = 0 \quad (4.17)$$

方程式(4.11)與方程式(4.17)之聯立解為 λ_α 與 ν ，將其寫成矩陣形式，如方程式(4.18)。

$$\begin{bmatrix} \sigma_Z^2 \mathbf{R}_\alpha & \mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{y}_\alpha^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_\alpha \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_Z^2 \mathbf{r}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

至此已可以利用方程式(4.18)的矩陣計算 λ_α ，而Kriging Estimator即可求得如方程式(4.19)，而Kriging模型的變異數即為方程式(4.13)，將其改寫成矩陣形式，如方程式(4.20)。

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{g}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x})^T & \mathbf{y}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\alpha & \mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{y}_\alpha^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_g(\mathbf{x}) &= \sigma_Z^2 (1 + \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\lambda}_\alpha - 2\boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{r}(\mathbf{x})) \\ &= \sigma_Z^2 \left[1 - \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x})^T & \mathbf{y}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\alpha & \mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{y}_\alpha^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

在此處我們所得到的Kriging模型，稱之為Universal Kriging，如果上述的方程式中的回歸函數 $y_j(\mathbf{x})$ 等於1，則我們稱之為Ordinary Kriging，如方程式(4.21)(4.22)，Ordinary Kriging具有一個特色，即利用無偏差拘束條件可以看出權重的總和等於一，如方程式(4.23)。

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x})^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\alpha & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_g(\mathbf{x}) &= \sigma_Z^2 \left[1 - \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x})^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\alpha & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right] \\ &= \sigma_Z^2 (1 - \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}_\alpha^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda}_\alpha(\mathbf{x}) = 1 \quad (4.23)$$

因工程領域主要最常用的Kriging模型是Ordinary Kriging，本論程式內容將以Ordinary Kriging為主。然而以上方程式的堆導，都是在共變異數方程式(4.12)已知的情況下所得的結果，不同的共變異數方程式會產生不同的Kriging模型，這樣的過程我們稱為擬合(Fitting)，在論文中，我們根據區域化變數理論的概念，是以變異圖來進行擬合，此詳細內容將在下一節說明，而有些文獻則會選用最大似然法來進行Kriging模型的擬合 [45]，其兩者間的差異可以參考 [46]。

4.1.3 變異圖

變異圖(Variogram)是地質統計中一種最基本的分析工具，能夠直接的呈現隨機函數在空間中的相關性，其詳細內容可參考文獻 [47,48]，其數學定義同等於本質假設的第二個方程式(4.7)，如下列方程式(4.24)，其中 $2\gamma(h)$ 為變異圖。

$$2\gamma(h) = E[(G(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_j))^2] \quad (4.24)$$

考慮一個滿足平穩假設與本質假設的隨機函數 $Z(\mathbf{x})$ ，則變異圖方程式可改寫成方程式(4.25)，其中 $\gamma(h)$ 為半變異圖(Semivariogram)

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= E[(G(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_j))^2] = E[G(\mathbf{x}_i)^2 - 2G(\mathbf{x}_i)G(\mathbf{x}_j) + G(\mathbf{x}_j)^2] \\ &\because E[G(\mathbf{x}_i)^2] = E[G(\mathbf{x}_j)^2] = \sigma_Z^2 \\ E[G(\mathbf{x}_i)G(\mathbf{x}_j)] &= \text{Cov}(G(\mathbf{x}_i), G(\mathbf{x}_j)) = \text{Cov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) \\ \therefore E[G(\mathbf{x}_i)^2 - 2G(\mathbf{x}_i)G(\mathbf{x}_j) + G(\mathbf{x}_j)^2] &= 2\sigma_Z^2 - 2\text{Cov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) \\ \therefore \gamma(h) &= \sigma_Z^2 - \text{Cov}(Z(\mathbf{x}_i), Z(\mathbf{x}_j)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

一般的半變異圖如圖4.3，根據不同的 h 值所對應的 γ 值，可以繪出半變異圖。相對距離愈小的樣本其半變異圖愈小，而隨著距離的增加，任兩點間的空間相依關係愈小，使得半變異圖到達一穩定狀態下圖形的高度，此半變異圖穩定狀態的值我們稱為門檻值(Sill)，到達門檻值的這段距離我們稱為影響範圍(Influence Range)，在接近原點處的高度稱為碎塊效應(Nugget Effect)。

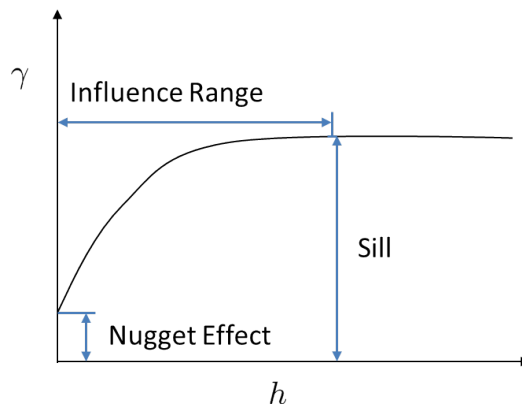


圖 4.3: 變異圖名詞示意圖

由於資料的特性不同，變異圖的形狀變化也會有所不同，必須依照資料的特性來選擇適當的數學模型，這些數學式我們稱之為理論變異圖(Theoretical Variogram)，以下舉例比較常見的三種理論變異圖模式。

- 球形模式(Spherical Model)

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + \sigma_Z^2 \left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right), & 0 \leq h \leq a \\ C_0 + \sigma_Z^2, & h > a \\ 0, & h = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

$$R(h) = \begin{cases} 1 - \frac{3h}{2a} + \frac{h^3}{2a^3}, & 0 \leq h \leq a \\ 0, & h > a \end{cases} \quad (4.27)$$

將方程式中的參數描述為半變異圖中的意義，則 C_0 代表著碎塊效應， σ_Z^2 代表整體變異數， $C_0 + \sigma_Z^2$ 即為達門檻值， a 代表影響範圍， $R(h)$ 為相對應於距離的空間相關函數，這些參數即為Kriging模型中需要進行擬合的參數。

- 指數模式(Exponential Model)

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + \sigma_Z^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{L}\right) \right), & h > 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

$$R(h) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{h}{L}\right), & h > 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

方程式中的影響範圍大約等於 $3L$ ，其他與球形模式敘述無異。

- 高斯模式(Gaussian Model)

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + \sigma_Z^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{h^2}{L^2}\right) \right), & h > 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

$$R(h) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{h^2}{L^2}\right), & h > 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

方程式中的影響範圍大約等於 $\frac{7L}{4}$ ，其他與球形模式敘述無異。

一個隨機過程的共變異數是無法從取樣直接得到，但是變異圖是可以從取樣的計算來觀察它的空間趨勢，經過(4.25)的推導後得知兩者間的關係後，我們只要計算變異圖就可以進而得到共變異數。接下來我們要介紹如何從取樣去計算變異圖，因為實際量測到的數據都視為定率，所以將變異圖方程式(4.24)改寫成方程式(4.32)，稱此式為經驗變異圖(Empirical Variogram)。

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{N(h)} [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + h)]^2 \quad (4.32)$$

其中 $N(h)$ 代表在所有樣本數據中，取樣之間距離為 h 的樣本個數，在符合樣本之間距離為 h 的樣本，將其量測值兩兩相減平方總和後，再除以距離為 h 的樣本總數。可參考圖4.4， \mathbf{x} 為樣本，距離 h_1 與 h_2 為不同距離的樣本，滿足距離為 h_1 的樣本有 $N(h_1)$ 個，而滿足距離為 h_2 的樣本有 $N(h_2)$ 個，以此類推。

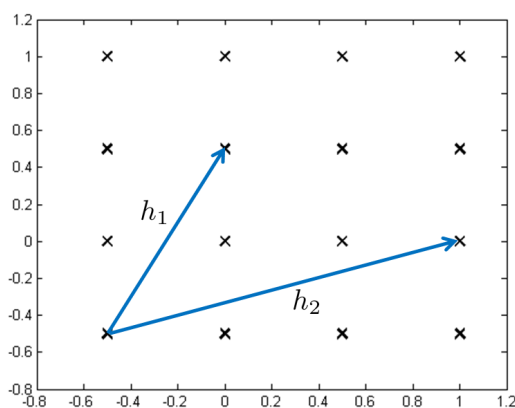


圖 4.4: 取樣與距離示意圖

- 範例：Camelback函數 [49]

$$f(\mathbf{x}) = -0.1 + \left(4 - 2.1x_1^2 + \frac{x_1^4}{3}\right)x_1^2 + x_1x_2 + (-4 + 4x_2^2)x_2^2 \quad (4.33)$$

此範例為一個二維的函數，如圖4.5a，其中等高線即為函數值， \mathbf{x} 即為取樣位置。根據此函數與取樣，依照經驗變異圖方程式(4.32)計算後可以得到圖4.5b，我們稱這張圖為變異圖雲圖(Variogram Cloud)。

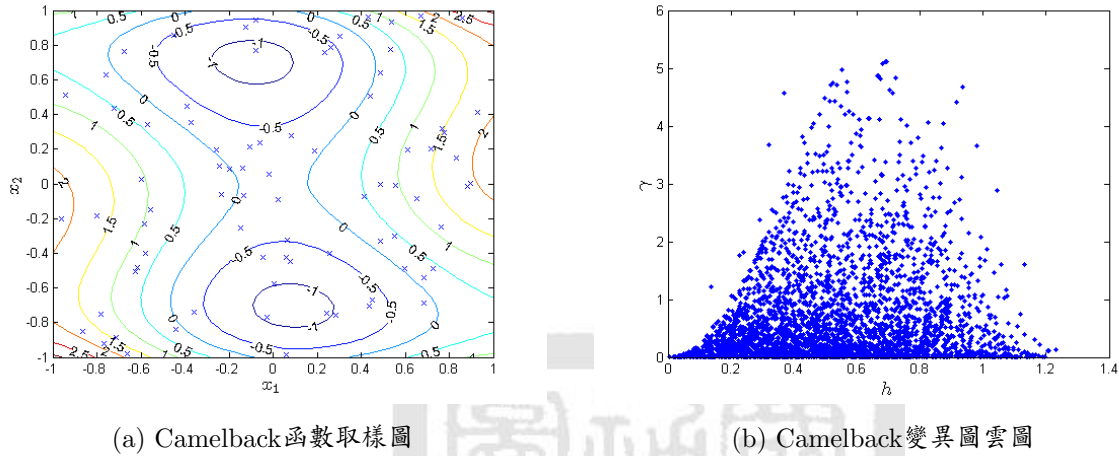


圖 4.5: 靠近原點之兩個說明範例樣本圖

但是由於變異圖雲圖的資料過於分散，無法觀察出變異圖的趨勢，因此我們將變異圖雲圖等分為數等分，如圖4.6的虛線所示，將每個區間的 γ 值總和之後，再除以符合區間內的樣本總數，其原理是將經驗變異圖方程式的距離 h ，改為一個滿足區間內的範圍，此方法為實驗變異圖(Experimental Variogram)，可以將實驗變異圖的距離定為此區間範圍內的一半或是區間內的所有樣本的平均距離，如方程式(4.34)，將範例的實驗變異圖結果繪製，如圖4.7。

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N(h_d)} \sum_{N(h_d)} [g(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_j)]^2 \quad (4.34)$$

$$h_d^l \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq h_d^u$$

$$h_d = \frac{1}{2}(h_d^l + h_d^u)$$

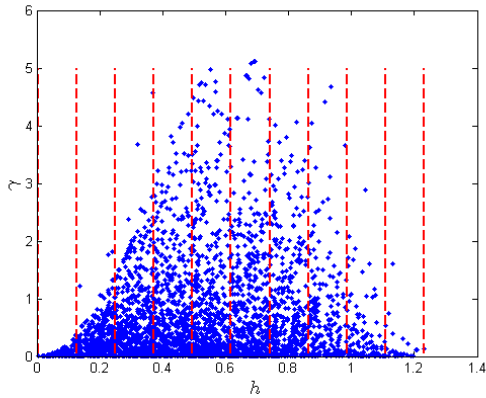


圖 4.6: 距離區域範圍示意圖

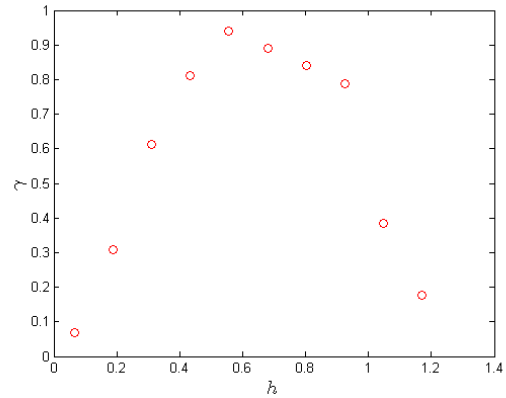


圖 4.7: Camelback實驗變異圖圖

在地理統計學上，對於Kriging模型的擬合沒有一定的標準方法，一般的做法都是將實驗變異圖繪製後，觀察其變異圖的變化趨勢，結合此空間的趨勢設定理論變異圖模式與參數，以建立一個最好的預測模型。然而對於在一般的工程領域來講，資料型態隨時都在更新或改變，所以我們需要一套的自動化的流程來進行變異圖的擬合，在論文的程式裡，我們是利用實驗變異圖與理論變異圖之間的平方誤差最小化的概念來進行擬合，以指數模型為例，如方程式(4.35)，其中 γ_α 為實驗變異圖、 γ_t 則為理論變異圖，而計算後所選用來擬合的實驗變異圖有 d 個，而每個實驗變異圖皆有其對應之距離。

$$\min_{C_0, L, \sigma_z^2} \sqrt{\sum_{i=1}^d [\gamma_\alpha(h_i) - \gamma_t(h_i)]^2} \quad (4.35)$$

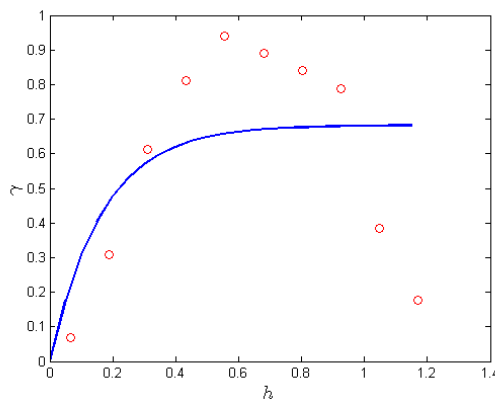


圖 4.8: 實驗變異圖與理論變異圖之擬合

同樣以Camelback函數 [49]作為範例，如方程式(4.33)，取樣位置與圖4.5相同，擬合完成後將實驗變異圖與理論變異圖的結果繪製成圖，如圖4.8，將原函數與Kriging模型預測的結

果比較，如圖4.9。

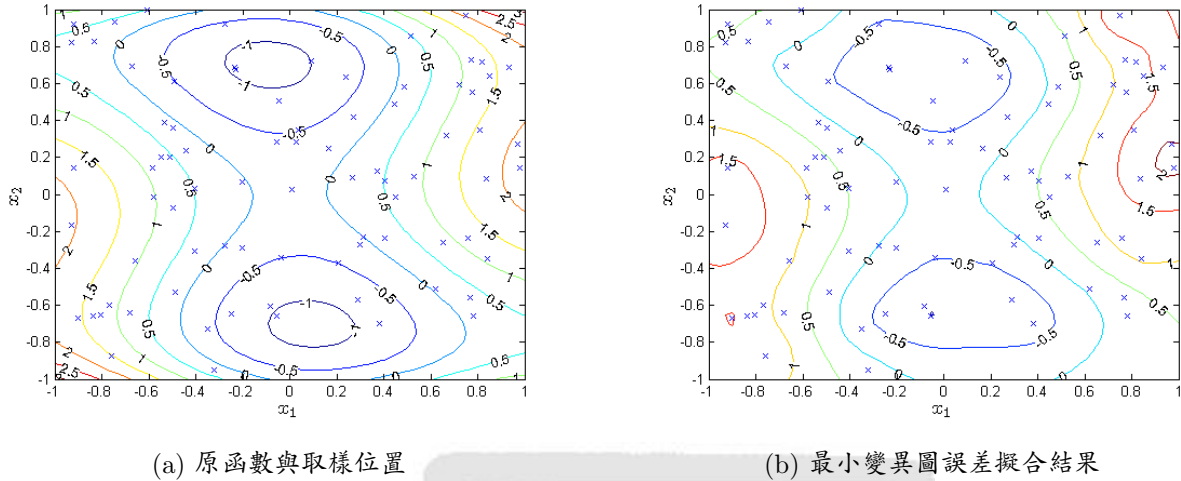


圖 4.9: 最小變異圖誤差擬合結果函數比較圖

4.2 Cokriging模型

Kriging模型只能針對單一種隨機函數進行推估，但是樣本數目的過少有可能會導致Kriging的預測模型不準，如果在同樣的區域內有另外一組較多樣本的隨機函數，我們是否能有效的利用樣本數較多的隨機函數來輔助樣本數較少的隨機函數，增加其預測精準度，此方法即為Cokriging模型。Cokriging在地理統計上的應用，都是用來增加主預測的精準度，例如在各個位置取樣了溫度和海拔高度兩種數據，想預測沒有取樣的位置之溫度值，此時可以藉由海拔高度的資料來做輔助，增加其溫度預測值的精準度 [50]。

4.2.1 Cokriging理論架構

Cokriging模型為Kriging模型的延伸，主要是兩種隨機函數間的相互關係，以其中一種較易於觀測的隨機函數對另外一組隨機函數進行輔助推估的方法。假設有 n_c 種隨機函數，取 n_s^k 個樣本數所得到的量測值為 $g_{k,\alpha}$ ，未取樣的主函數預測值為 \hat{g}_i ，Cokriging模型的概念跟Kriging概念一樣，只是多考慮了另一組隨機函數，預測值為本身量測值與輔助量測值的線

性權重組合，如方程式(4.36)。

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_c} \left(\sum_{\alpha=1}^{n_s^k} \lambda_{k,\alpha}(\mathbf{x}) g_{k,\alpha} \right) \quad (4.36)$$

在實際的應用上，Cokriging模型要求兩種隨機函數在空間中須有一定的關係函數，所以就必須在很多地點同時採樣，以測定兩個函數間的相互關係。如果考慮了兩組或多組以上的隨機函數，就需要觀察任兩組隨機函數在空間上的變化趨勢，其方法跟研究單一隨機函數的類似，同樣的建立在區域化變數理論上，提出了平穩假設與本質假設

• 平穩假設：當一個隨機函數滿足下列三個條件則滿足平穩假設

1. 在不同位置隨機函數的期望值為一定值。此方程式同等於(4.3)

$$E[G_k(\mathbf{x})] = m_k \quad (4.37)$$

2. 在不同位置隨機函數的變異數為一定值。此方程式同等於(4.4)

$$\text{Var}[G_k(\mathbf{x})] = E[G_k(\mathbf{x})^2] = E[Z_k(\mathbf{x})^2] = \sigma_{Z_k}^2 \quad (4.38)$$

3. 空間中任意兩個位置之隨機函數的交叉共變異數和共變異數只與兩點間的相對距離有關，與其所在位置無關，當 $k = l$ 時，此方程式同等於(4.5)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(G_k(\mathbf{x}_i), G_l(\mathbf{x}_j)) &= \text{Cov}(Z_k(\mathbf{x}_i), Z_l(\mathbf{x}_j)) \\ &= E[(Z_k(\mathbf{x}_i) - m_k)(Z_l(\mathbf{x}_j) - m_l)] = C_1(h) \end{aligned} \quad (4.39)$$

其中 $h = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ ， $C_1(h)$ 為一個與距離有關之函數。

• 本質假設：

1. 空間中任意兩個位置之隨機函數，其之間差值的期望值為兩個位置之間的距離函數，與其所在位置無關，當 $k = l$ 時，此方程式同等於(4.6)

$$E[G_k(\mathbf{x}_i) - G_l(\mathbf{x}_j)] = C_1(h) \quad (4.40)$$

2. 空間中任意兩個位置之隨機函數，其之間差值的變異數為兩個位置之間的距離函數，與其所在位置無關，當 $k = l$ 時，此方程式同等於(4.7)

$$\text{Var}[G_k(\mathbf{x}_i) - G_l(\mathbf{x}_j)] = E[(G_k(\mathbf{x}_i) - G_l(\mathbf{x}_j))^2] = C_2(h) \quad (4.41)$$

其中 $h = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ ， $C_1(h)$ 與 $C_2(h)$ 僅代表兩個與距離有關之函數。

4.2.2 Cokriging公式推導

我們可以將方程式(4.2)表示成在同一區域內存在著多組以上的不同隨機函數，同樣的 g_k 可以用 n 個回歸函數所組成如方程式(4.43)

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_c} \left(\sum_{\alpha=1}^{n_s^k} \lambda_{k,\alpha}(\mathbf{x}) g_{k,\alpha} \right) \quad (4.42)$$

$$g_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \beta_{k,j} y_{k,j}(\mathbf{x}) + Z_k(\mathbf{x}) \quad (4.43)$$

$y_{k,j}$ 為第 k 組隨機函數的第 j 個回歸函數。 $\beta_{k,j}$ 為 $y_{k,j}$ 的回歸係數。 Z_k 是一個平均值為零，標準差為 σ_k 的高斯隨機分布。Cokriging模型為各個隨機函數的樣本點量測值線性組合，對每個隨機函數由這些樣本結果我們可以得到下列方程式(4.43)，將此視為一個實際存在的函數。

$$G_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_c} G_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_c} (\mathbf{y}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + Z_k(\mathbf{x})) \quad (4.44)$$

取 n_s^k 個樣本點，分別為 $\{\mathbf{x}_{k,\alpha} : \alpha = 1, \dots, n_s^k\}$ ，取得的量測值分別為 $\{g_{k,\alpha} : \alpha = 1, \dots, n_s^k\}$ ，將這些樣本結果代入方程式(4.44)可得到下列方程式(4.45)，根據假設，我們將此關係式視為一個實際存在的函數。

$$\begin{pmatrix} g_{k,1} \\ g_{k,2} \\ \vdots \\ g_{k,n_s^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k,1}(\mathbf{x}_1) & y_{k,2}(\mathbf{x}_2) & \cdots & y_{k,j}(\mathbf{x}_{n_s^k}) \\ y_{k,1}(\mathbf{x}_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ y_{k,1}(\mathbf{x}_1) & \cdots & & y_{k,j}(\mathbf{x}_{n_s^k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{k,1} \\ \beta_{k,2} \\ \vdots \\ \beta_{k,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_k(\mathbf{x}_1) \\ Z_k(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ Z_k(\mathbf{x}_{n_s^k}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{k,\alpha} = \mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k \quad (4.45)$$

如方程式(4.36)，Cokriging模型的基本假設為本身量測值與輔助量測值的線性權種組合，稱為Cokriging Estimator，如方程式(4.46)

$$\begin{aligned}
\hat{g}_i(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})^T \mathbf{g}_{k,\alpha} \\
&= \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})^T \mathbf{Z}_k
\end{aligned} \tag{4.46}$$

在推導Cokriging模型的過程中，其概念跟Kriging模型一樣，是利用最佳線性無偏估計的方法來進行，先假設Cokriging模型具有無偏差的性質，將真實函數方程式(4.44)與Cokriging Estimator方程式(4.46)的期望值相等，可得到方程式((4.47)作為無偏差拘束的條件，當線性組合的權重滿足此方程式時，Cokriging模型即可具有無偏差性質的預測值。

$$\begin{aligned}
E[\hat{g}_i(\mathbf{x})] &= E[G_i(\mathbf{x})] \\
E[\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})^T \mathbf{Z}_k] &= E[\mathbf{y}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k(\mathbf{x})] \\
\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})^T \mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k &= \mathbf{y}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}_k \\
\mathbf{y}_{k,\alpha}^T \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}_k(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.47}$$

在進行第二步驟推導之前，我們由平穩假設方程式(4.39)，將兩個隨機函數的共變異數方程式定義成下列方程式(4.48)， $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 為空間相關函數(Spatial Correlation Function)，為了推導過程方便，先將此方程式視為一個已知的函數，其內容將在下一小節說明。當 $k = l$ 時，此方程式則等同為(4.12)。

$$E(Z_k(\mathbf{x}_i)Z_l(\mathbf{x}_j)) = \text{Cov}(Z_k(\mathbf{x}_i), Z_l(\mathbf{x}_j)) = \sigma_{Z_k} \sigma_{Z_l} R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.48}$$

接下來的步驟是要最小化均方誤差，將Cokriging Estimator與真實函數之間的均方誤差列出，為了簡化符號，將 $\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x})$ 省略為 $\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}$

$$\begin{aligned}
E[\hat{g}_i(\mathbf{x}) - G_i(\mathbf{x})]^2 &= E[\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{g}_{k,\alpha} - G_i(\mathbf{x})]^2 \\
&= E[\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{g}_{k,\alpha} \mathbf{g}_{k,\alpha}^T \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha} - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{g}_{k,\alpha} G_i(\mathbf{x}) + G_i(\mathbf{x})^2] \\
&= E[\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T (\mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k) (\mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha} - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T (\mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k) (\mathbf{y}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k(\mathbf{x})) \dots \\
&\quad + (\mathbf{y}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{Z}_k(\mathbf{x}))^2] \\
&= (\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{y}_{k,\alpha} \boldsymbol{\beta}_k - \mathbf{y}_k^T \boldsymbol{\beta}_k)^2 + \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{R}_{kl} \boldsymbol{\lambda}_{l,\alpha} + \sigma_{Z_i}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\
&= \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{R}_{kl} \boldsymbol{\lambda}_{l,\alpha} + \sigma_{Z_i}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\
&= \hat{\sigma}_{g_i}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.49}$$

\mathbf{R}_{kl} 為各兩組隨機函數中取樣之間的空間相關函數矩陣，其大小為 $n_s^k \times n_s^l$ ， $\mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x})$ 為取樣與預測位置的空間相關函數矩陣，其大小為 $n_s^k \times 1$

$$\mathbf{R}_{kl} = \sigma_{Z_k} \sigma_{Z_l} \begin{pmatrix} R(h_{11}) & R(h_{12}) & \dots & R(h_{1n_s^l}) \\ R(h_{21}) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ R(h_{n_s^k 1}) & \dots & & R(h_{n_s^k n_s^l}) \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

$$\mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) = \sigma_{Z_k} \sigma_{Z_i} \begin{pmatrix} R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ R(\mathbf{x}_{n_s^k}, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

此時我們已經擁有Cokriging模型推估變異數的一般式，如方程式(4.49)，此式子代表著Cokriging模型與實際函數的方均誤差，因此我們要在無偏差拘束條件下，令其均方誤差最小化，將問題寫成一般最佳化數學式，如下列方程式(4.51)

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}} \quad & \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{R}_{kl} \boldsymbol{\lambda}_{l,\alpha} + \sigma_{Z_i}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{y}_{k,\alpha}^T \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_k(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.51}$$

方程式(4.51)的最佳化問題可用拉格朗日方程式(Largrange Function)(4.52)，其中 ν_k 為拉格朗日因子(Largrange Multipliers)。

$$L_{\nu} = \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{R}_{kl} \boldsymbol{\lambda}_{l,\alpha} + \sigma_{Z_i}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) + 2\nu_k [\mathbf{y}_{k,\alpha}^T \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_k(\mathbf{x})] \quad (4.52)$$

將拉格朗日方程式對 $\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}$ 微分可得

$$\mathbf{R}_{kl} \boldsymbol{\lambda}_{l,\alpha} - \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) + \nu_k \mathbf{y}_{k,\alpha} = 0 \quad (4.53)$$

方程式(4.47)與方程式(4.53)之聯立解為 $\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}$ 與 ν_k ，將其寫成矩陣形式，如方程式(4.54)。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{kl} & \mathbf{y}_{k,\alpha} \\ \mathbf{y}_{k,\alpha}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha} \\ \nu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

至此已可以利用方程式(4.54)的矩陣計算 $\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}$ ，而Cokriging Estimator即可求得如方程式(4.55)，而Kriging模型的變異數即為方程式(4.49)，將其改寫成矩陣形式，如方程式(4.56)。

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{g}_{k,\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{kl} & \mathbf{y}_{k,\alpha} \\ \mathbf{y}_{k,\alpha}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{k,\alpha} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{g_i}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{R}_{kl} \boldsymbol{\lambda}_{l,\alpha} + \sigma_{Z_i}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha}^T \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\ &= \sigma_{Z_i}^2 - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{kl} & \mathbf{y}_{k,\alpha} \\ \mathbf{y}_{k,\alpha}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ki}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

以上的方程式(4.55)(4.54)均可得到Cokriging模型的平均值與變異數。Cokriging的型態有很多種，在工程上比較常用的為Ordinary Cokriging，他的特色是將要預測的主要值 g_i 權重相加為1，輔助值 g_k 權重相加為0($k \neq i$)，如上式的回歸函數 $y_i(\mathbf{x})$ 等於1， $y_k(\mathbf{x})$ 等於0($k \neq i$)，將上述給的條件我們可以得到Ordinary Cokriging的權重限制條件方程式(4.57)。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i,\alpha}^T \boldsymbol{\lambda}_{i,\alpha} &= 1 \\ \mathbf{y}_{k,\alpha}^T \boldsymbol{\lambda}_{k,\alpha} &= 0 \quad k \neq i \end{aligned} \quad (4.57)$$

爲了讓推導過程更清楚，假設我們現在有兩組隨機函數， n_c 爲2，及 $k = 1, 2$ ， g_1 爲主要隨機函數， g_2 爲輔助隨機函數，代入方程式(4.54)-(4.56)和權重限制式(4.57)我們可以得到(4.58)-(4.60)。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{1}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_1^T & \mathbf{0}_2^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_1^T & \mathbf{1}_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1,\alpha} \\ \lambda_{2,\alpha} \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}_{21}(\mathbf{x}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(\mathbf{x}) &= \lambda_{1,\alpha}^T \mathbf{g}_{1,\alpha} + \lambda_{2,\alpha}^T \mathbf{g}_{2,\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}_{21}(\mathbf{x}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{1}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_1^T & \mathbf{0}_2^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_1^T & \mathbf{1}_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{1,\alpha} \\ \mathbf{g}_{2,\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{g_1}(\mathbf{x}) &= \lambda_{1,\alpha}^T \mathbf{R}_{11} \lambda_{1,\alpha} + \sigma_{Z_1}^2 - 2\lambda_{1,\alpha}^T \mathbf{r}_{11}(\mathbf{x}) + \lambda_{2,\alpha}^T \mathbf{R}_{22} \lambda_{2,\alpha} \\ &\quad + 2\lambda_{1,\alpha}^T \mathbf{R}_{21} \lambda_{2,\alpha} - 2\lambda_{2,\alpha}^T \mathbf{r}_{21}(\mathbf{x}) \\ &= \sigma_{Z_1}^2 - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}_{21}(\mathbf{x}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{1}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_1^T & \mathbf{0}_2^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_1^T & \mathbf{1}_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}_{21}(\mathbf{x}) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Cokriging模型跟Kriging模型的不同之處是多考慮交叉變異的關係，上面的方程式推倒過程，都是在函數的共變異數與交叉共變異數已知的情況下所得到的結果，而共變異數方程式是由變異圖所求得，而交叉共變數方程式則是由交叉變異圖來求得，此詳細過程將在下小一節作說明。

4.2.3 交叉變異圖

交叉變異圖(Cross-Variogram)原理跟變異圖一樣，變異圖是針對單一種隨機函數進行空間分析，而交叉變異圖是考慮兩種隨機函數在空間的交叉相關性，其數學定義同等於共區域化變數理論的本質假設第二方程式(4.41)，如下列方程式(4.61)， $2\gamma_{kl}(h)$ 爲交叉變異圖，當 $k = l$ 時，則同爲變異圖方程式(4.24)

$$2\gamma_{kl}(h) = E[(G_k(\mathbf{x}_i) - G_l(\mathbf{x}_j))^2] \quad (4.61)$$

考慮滿足平穩假設與本質假設的兩種不同隨機函數 $G_k(\mathbf{x})$ 與 $G_l(\mathbf{x})$ ，則交叉變異圖方程式可改寫成方程式(4.62)，其中 $\gamma_{kl}(h)$ 為交叉半變異圖(Cross-semivariogram)

$$\begin{aligned} 2\gamma_{kl}(h) &= E[(G_k(\mathbf{x}_i) - G_l(\mathbf{x}_j))^2] = E[G_k(\mathbf{x}_i)^2 - 2G_k(\mathbf{x}_i)G_l(\mathbf{x}_j) + G_l(\mathbf{x}_j)^2] \\ &\because E[G_k(\mathbf{x}_i)^2] = \sigma_{Z_k}^2, E[G_l(\mathbf{x}_i)^2] = \sigma_{Z_l}^2 \\ E[G_k(\mathbf{x}_i)G_l(\mathbf{x}_j)] &= \text{Cov}(G_k(\mathbf{x}_i), G_l(\mathbf{x}_j)) = \text{Cov}(Z_k(\mathbf{x}_i), Z_l(\mathbf{x}_j)) \\ \therefore E[G_k(\mathbf{x}_i)^2 - 2G_k(\mathbf{x}_i)G_l(\mathbf{x}_j) + G_l(\mathbf{x}_j)^2] &= \sigma_{Z_k}^2 + \sigma_{Z_l}^2 - \text{Cov}(Z_k(\mathbf{x}_i), Z_l(\mathbf{x}_j)) \\ \therefore \gamma_{kl}(h) &= (\sigma_{Z_k}^2 + \sigma_{Z_l}^2)/2 - \text{Cov}(Z_k(\mathbf{x}_i), Z_l(\mathbf{x}_j)) \quad (4.62) \end{aligned}$$

如變異圖概念所式，要得到兩種不同隨機函數的交叉共變異數，我們得先從交叉變異圖著手，交叉變異圖因為考慮了兩個不同隨機函數的關係，所以計算上它不像變異圖有恆正定的關係，關於交叉變異圖的正定與非正定關係，我們會用範例來進行講解，首先將交叉變異圖方程式(4.61)改寫成方程式(4.63)，稱此式為經驗交叉變異圖(Empirical Crossvariogram)。

$$2\gamma_{kl}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{N(h)} [g_k(\mathbf{x}) - g_k(\mathbf{x} + h)][g_l(\mathbf{x}) - g_l(\mathbf{x} + h)] \quad (4.63)$$

其中 $N(h)$ 代表在所有樣本數據中，取樣之間距離為 h 的樣本個數，在符合樣本之間距離為 h 的樣本，將其兩同樣位置的兩不同量測值相減互乘總和後，再除以距離為 h 的樣本總數。 x 與 o 為分別為兩組不同隨機函數的樣本，在相同位置的兩樣本中，距離 h_1 與 h_2 為不同距離的樣本，滿足距離為 h_1 的樣本有 $N(h_1)$ 個，而滿足距離為 h_2 的樣本有 $N(h_2)$ 個，以此類推。

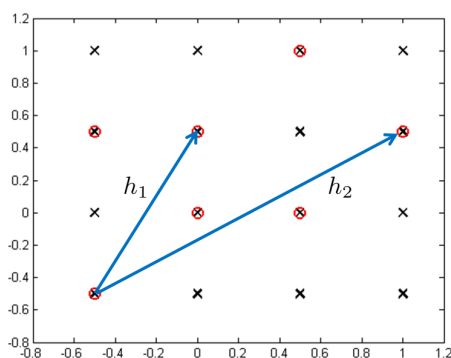


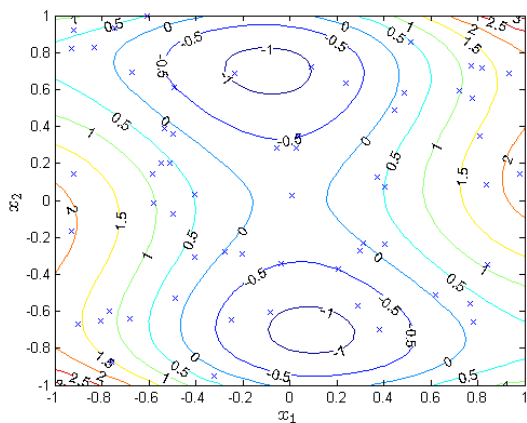
圖 4.10: 兩隨機函數取樣與距離示意圖

此時用數學範例來展示如何求得交叉變異圖，將Camelback函數 [49]多增加幾個多項式，讓其之間有一定的相互關係，如方程式(4.65)和(4.66)。此範例為三組二維的數學函數，如圖4.11，等高線為函數值。

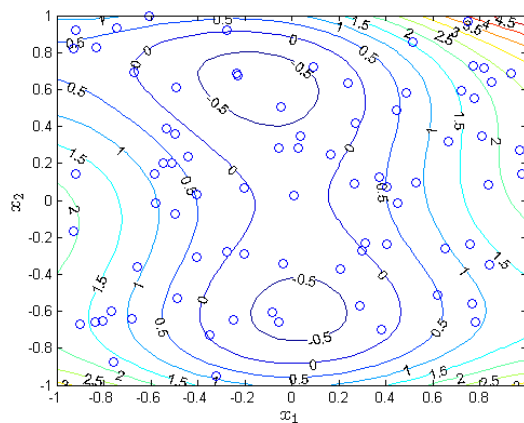
$$f_1(\mathbf{x}) = -0.1 + \left(4 - 2.1x_1^2 + \frac{x_1^4}{3}\right)x_1^2 + x_1x_2 + (-4 + 4x_2^2)x_2^2 \quad (4.64)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + x_1x_2^2 + x_2^2 \quad (4.65)$$

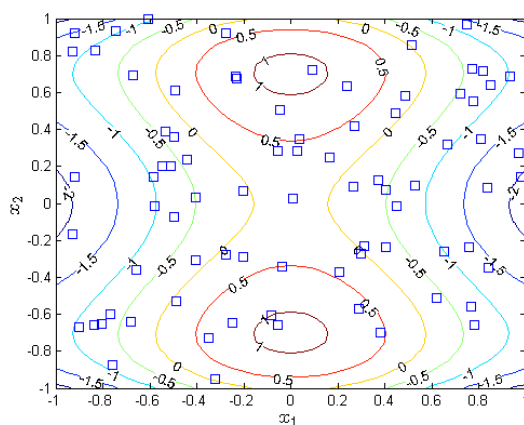
$$f_3(\mathbf{x}) = x_1x_2 - f_1(\mathbf{x}) \quad (4.66)$$



(a) $f_1(\mathbf{x})$ 函數取樣圖



(b) $f_2(\mathbf{x})$ 函數取樣圖



(c) $f_3(\mathbf{x})$ 函數取樣圖

圖 4.11: 相關性函數取樣圖

在章節一開始提到，若要使用Cokriging模型，必須檢查各組不同的隨機函數有無相互關係，因此我們必須對兩組函數間所共同位置的樣本做相關性的檢查，兩組函數間的取樣位置

如圖(4.12)，符號 \times 、 \circ 、 \square 分別代表 $f_1(\mathbf{x})$ 、 $f_2(\mathbf{x})$ 和 $f_3(\mathbf{x})$ 的取樣位置，相關性如圖(4.13)，從圖中可以發現 $f_1(\mathbf{x})$ 函數與 $f_2(\mathbf{x})$ 函數為正相關性，則 $f_1(\mathbf{x})$ 函數與 $f_3(\mathbf{x})$ 函數為負相關性。

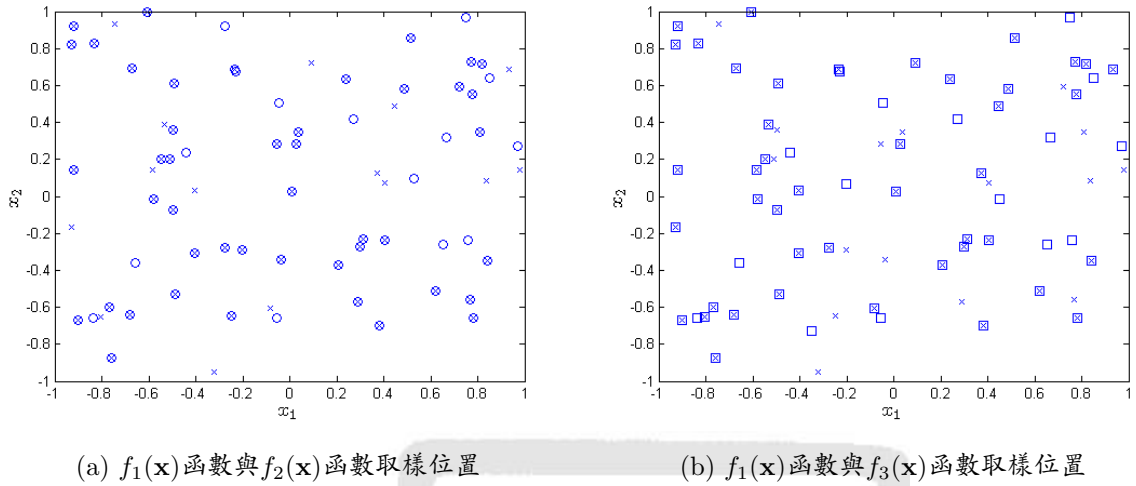


圖 4.12: 相關性函數取樣位置圖

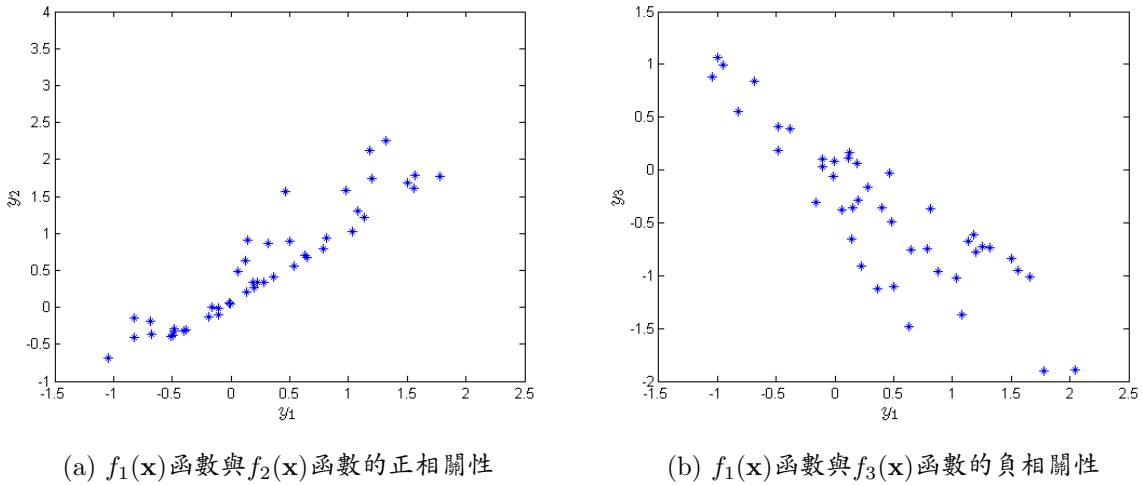


圖 4.13: 相關性函數檢查

依照變異圖的求解過程，交叉變異圖也是用同樣的方法，由方程式(4.63)計算可得到交叉變異雲圖(Crossvariogram Cloud)，如圖4.15，在將其改寫成方程式(4.67)，可以得到實驗交叉變異圖(Experimental Crossvariogram)。

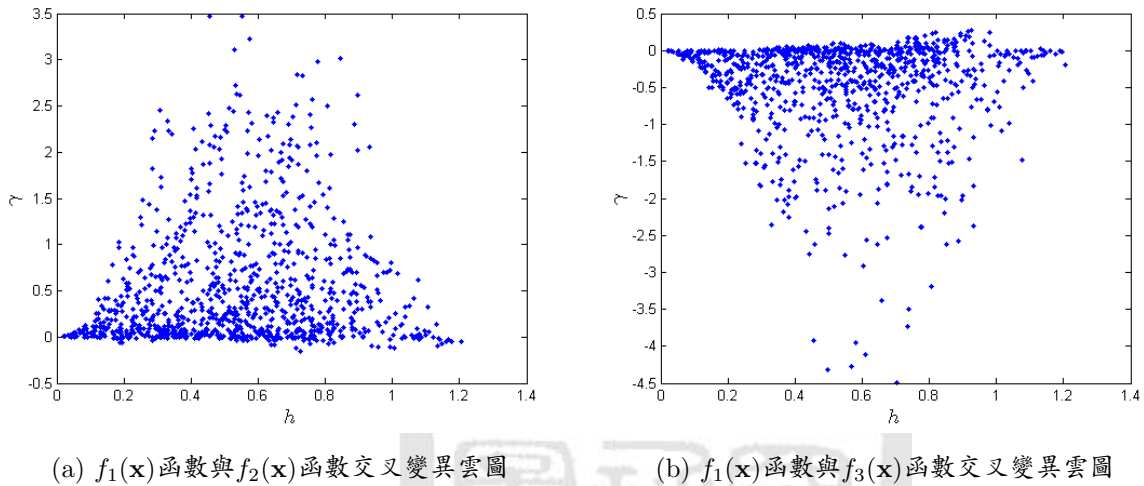


圖 4.14: 相關性函數交叉變異雲圖

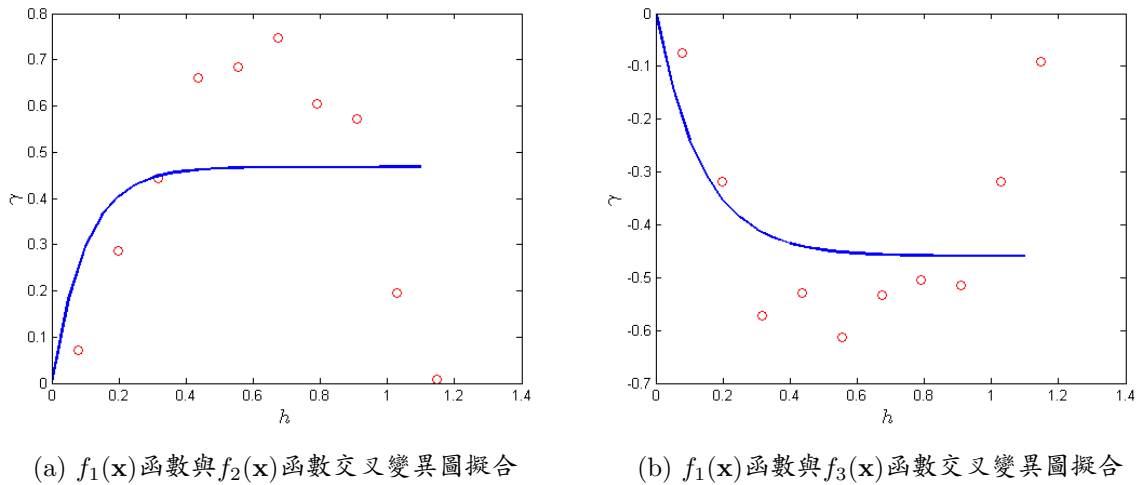


圖 4.15: 相關性函數交叉變異圖擬合結果

$$2\gamma_{kl}(h) = \frac{1}{N(h_d)} \sum_{N(h_d)} [g_k(\mathbf{x}_i) - g_k(\mathbf{x}_j)][g_l(\mathbf{x}_i) - g_l(\mathbf{x}_j)] \quad (4.67)$$

$$h_d^l \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \leq h_d^u$$

$$h_d = \frac{1}{2}(h_d^l + h_d^u)$$

得到了交叉實驗變異圖之後，我們將進行擬合，Cokriging模型在擬和部分跟Kriging模型比較不同，因為考慮交叉變異的關係，必須讓各共變異數值 $\sigma_{Z_k}\sigma_{Z_k}$ 和交叉共變異數值 $\sigma_{Z_k}\sigma_{Z_l}$ 符合Permissible模型原理(如小節4.2.4)，才能確保方程式(4.56)預測值的變異數為非負值，擬和部分將是所有實驗變異圖與交叉實驗變異圖跟理論變異圖與理論交叉變異圖的個別平方誤差最小的總和來進行，如方程式(4.68)，並加入一個Permissible模型的拘束條件，如方程式(4.69)，得到 θ_{kl} 與 $\sigma_{Z_k Z_l}$ 的最佳值，其中理論交叉變異圖跟理論變異圖是一樣的數學模型，但是在數學定義上我們把共變異參數 σ_Z^2 改寫成 $\sigma_{Z_k}\sigma_{Z_l}$

$$\min_{\theta_{kl}, \sigma_{Z_k Z_l}} \sum_{k=1}^{n_c} \left\{ \left[\sum_{i=1}^d [\gamma_{\alpha_{kl}}(h_i) - \gamma_{t_{kl}}(h_i)]^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (4.68)$$

$$s.t. Per(\sigma_{Z_k Z_l}) \quad (4.69)$$

4.2.4 Permissible模型

假設每組變量分別有 n_s^k 個樣本點 $\{\mathbf{x}_{k,\alpha} : \alpha = 1, \dots, n_s^k\}$ ，取得的量測值分別為 $\{g_{k,\alpha}(\mathbf{x}_{k,\alpha}) : \alpha = 1, \dots, n_s^k\}$ ，預測 g_i 為它們的線性權重組合 $\lambda_{k,\alpha} g_{k,\alpha}$ ，其變異數的數學方程式如下(4.70)

$$\begin{aligned} \text{Var}[g_i] &= \text{Var} \{ \lambda_{k,\alpha} g_{k,\alpha} \} \\ &= \lambda_{k,\alpha}^T \mathbf{R}_{kl} \lambda_{l,\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

\mathbf{R}_{kl} 為任意兩組隨機函數的交叉共變異數矩陣，如方程式(4.50)，為了確保此變異數為非負值，此以距離為函數的交叉共變異數矩陣 $\mathbf{R}_{kl}(\mathbf{h})$ 必須是一個半正定(Positive semi-definite)矩陣。對於一個對稱矩陣(Symmetric matrix)來說，只要它的所有的主子行列式值為非負值的話，那麼它就會是一個半正定矩陣 [51]。因為 $\mathbf{R}_{kl}(\mathbf{h})$ 是一個以距離為函數的交叉共變異矩陣，此時只要確保他們函數前的共變異數值與交叉共變異數值 $\sigma_{Z_k Z_l}$ 所構成的矩陣為半正

定矩陣，那麼變異數的結果就會是非負值。以下舉一個當有三組隨機函數的半正定情況，及 $n_c = 3$ 時。

$$\sigma_{Z_k Z_l} = \begin{bmatrix} \sigma_{Z_1 Z_1} & \sigma_{Z_1 Z_2} & \sigma_{Z_1 Z_3} \\ \sigma_{Z_2 Z_1} & \sigma_{Z_2 Z_2} & \sigma_{Z_2 Z_3} \\ \sigma_{Z_3 Z_1} & \sigma_{Z_3 Z_2} & \sigma_{Z_3 Z_3} \end{bmatrix}$$

- 所有的對角線值為非負值

$$\sigma_{Z_1 Z_1} \geq 0, \sigma_{Z_2 Z_2} \geq 0, \sigma_{Z_3 Z_3} \geq 0$$

- 所有的二階的主子行列值為非負值

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Z_1 Z_1} & \sigma_{Z_1 Z_2} \\ \sigma_{Z_2 Z_1} & \sigma_{Z_2 Z_2} \end{bmatrix} = \sigma_{Z_1 Z_1} \times \sigma_{Z_2 Z_2} - [\sigma_{Z_2 Z_1}]^2 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Z_2 Z_2} & \sigma_{Z_2 Z_3} \\ \sigma_{Z_3 Z_2} & \sigma_{Z_3 Z_3} \end{bmatrix} = \sigma_{Z_2 Z_2} \times \sigma_{Z_3 Z_3} - [\sigma_{Z_3 Z_2}]^2 \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Z_1 Z_1} & \sigma_{Z_1 Z_3} \\ \sigma_{Z_3 Z_1} & \sigma_{Z_3 Z_3} \end{bmatrix} = \sigma_{Z_1 Z_1} \times \sigma_{Z_3 Z_3} - [\sigma_{Z_3 Z_1}]^2 \geq 0$$

- 三階的行列式值必須為非負值

$$\begin{vmatrix} \sigma_{Z_1 Z_1} & \sigma_{Z_1 Z_2} & \sigma_{Z_1 Z_3} \\ \sigma_{Z_2 Z_1} & \sigma_{Z_2 Z_2} & \sigma_{Z_2 Z_3} \\ \sigma_{Z_3 Z_1} & \sigma_{Z_3 Z_2} & \sigma_{Z_3 Z_3} \end{vmatrix} = \sigma_{Z_1 Z_1} (\sigma_{Z_2 Z_2} \cdot \sigma_{Z_3 Z_3} - [\sigma_{Z_2 Z_3}]^2) \\ - \sigma_{Z_1 Z_2} (\sigma_{Z_2 Z_1} \cdot \sigma_{Z_3 Z_3} - \sigma_{Z_3 Z_1} \cdot \sigma_{Z_2 Z_3}) \\ + \sigma_{Z_1 Z_3} (\sigma_{Z_2 Z_1} \cdot \sigma_{Z_3 Z_2} - \sigma_{Z_3 Z_1} \cdot \sigma_{Z_2 Z_2}) \geq 0$$

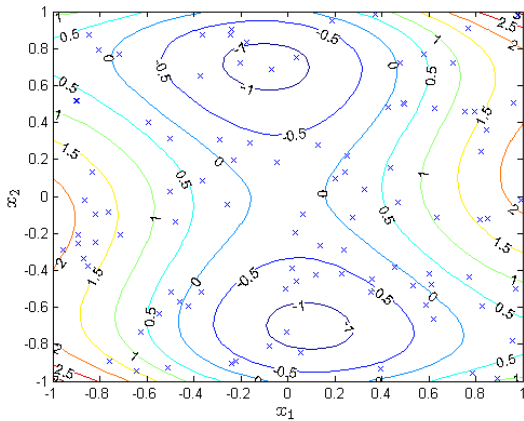
從Permissible模型的原理來看，建立Cokriging模型時，如果越多組的隨機函數，在進行變異圖與交叉變異圖擬合時，由於要考慮到更多的限制條件，而且又要找到多個最佳解，在計算上必定會更加的困難，而有些文獻或書籍 [44,50]對於Cokriging模型大部分都只討論到2組或3組的隨機函數。

4.3 Kriging與Cokriging模型方法比較

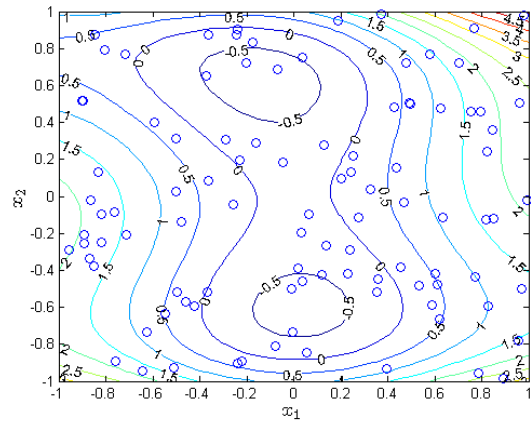
此小節主要是探討在不同樣本數下，Kriging模型跟Cokriging模型的預測精準度。此範例為Camelback函數 [49]與其調整過的正相關的函數，根據方程式(4.71)與(4.72)，分別在兩個函數區間內隨機取相同位置的100個樣本，如圖4.16所示。

$$f_1(\mathbf{x}) = -0.1 + \left(4 - 2.1x_1^2 + \frac{x_1^4}{3}\right)x_1^2 + x_1x_2 + (-4 + 4x_2^2)x_2^2 \quad (4.71)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + x_1x_2^2 + x_2^2 \quad (4.72)$$



(a) $f_1(\mathbf{x})$ 函數取樣圖



(b) $f_2(\mathbf{x})$ 函數取樣圖

圖 4.16: 主隨機函數和輔助隨機函數取樣示意圖

此時將 $f_1(\mathbf{x})$ 視為主函數， $f_2(\mathbf{x})$ 為輔助函數，隨機將 $f_1(\mathbf{x})$ 的樣本數持續減少， $f_2(\mathbf{x})$ 則維持不變，用Kriging模型和Cokriging模型去預測主函數被移除掉位置的結果，如圖4.17的位置點B所示，並且用均方根誤差(Root Mean Squared Error, RMSE)來比較其精準度，如方程式(4.73)。

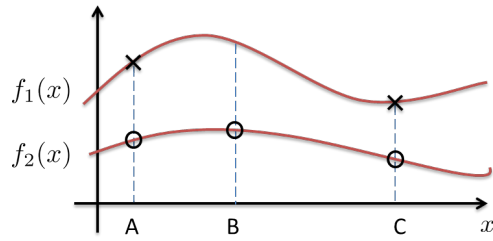
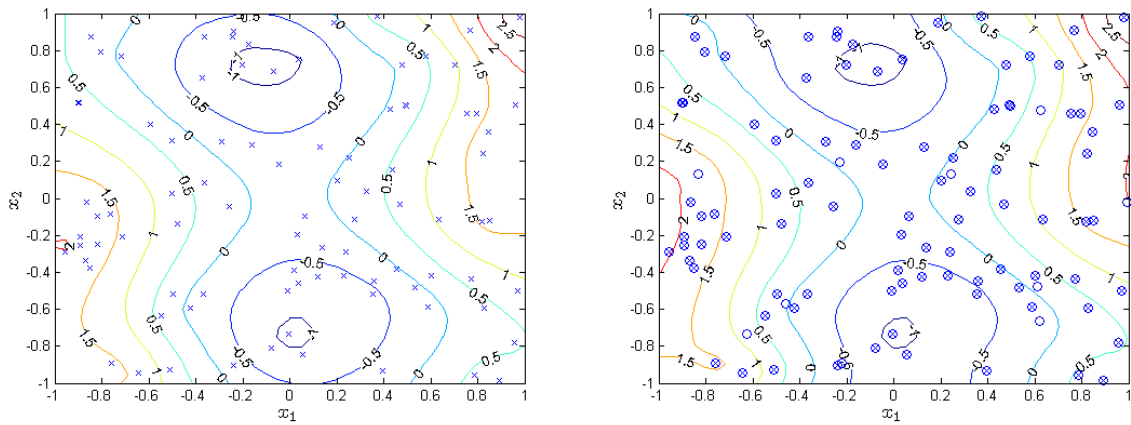


圖 4.17: Kriging和Cokriging預測示意圖

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_v} (f_1^{(i)} - \hat{f}_1^{(i)})^2}{N_v}} \quad (4.73)$$

圖4.18和表4.2、4.1為主函數樣本數為90個、輔助函數樣本數為100之預測函數圖及均方根誤差情況。



(a) $n_k^1 = 90$ 的Kriging模型預測

(b) $n_k^1 = 90, n_k^2 = 100$ 的Cokriging模型預測

圖 4.18: 主隨機函數和輔助隨機函數樣本數不同預測情況

表 4.1: Kriging模型和Cokriging模型誤差比較

	Location		Response	Kriging		Cokriging	
	x_1	x_2	$f_1(\mathbf{x})$	$\hat{f}_1(\mathbf{x})$	error	$\hat{f}_1(\mathbf{x})$	error
1	0.2448	0.1300	0.0976	0.0955	0.0021	0.0991	0.0015
2	-0.4619	-0.5674	0.0499	0.0460	0.0039	0.0471	0.0028
3	0.6226	-0.6615	-0.2418	-0.1143	0.1275	-0.2369	0.0049
4	-0.6252	-0.7359	0.6297	0.8588	0.2291	0.7467	0.1170
5	0.6257	0.4765	0.7601	0.7580	0.0021	0.7540	0.0265
6	-0.2322	0.1941	-0.0805	-0.0892	0.0087	-0.0540	0.0265
7	0.6122	-0.4776	0.1249	0.1225	0.0024	0.1237	0.0012
8	0.9951	-0.0208	2.1030	1.7094	0.3936	1.9958	0.1072
9	-0.8300	0.1337	1.5867	1.3899	0.1968	1.8441	0.2573
10	-0.2216	-0.8924	-0.3597	-0.3333	0.0263	-0.3675	0.0079

表 4.2: 均方根誤差結果

	Kriging	Cokriging
RMSE	0.1622	0.0960

接著我們將主函數的樣本數慢慢減少，而輔助函數樣本數維持不變，並比較他們的誤差情況。圖4.19為隨機減少主函數樣本數並比較誤差的10次結果。

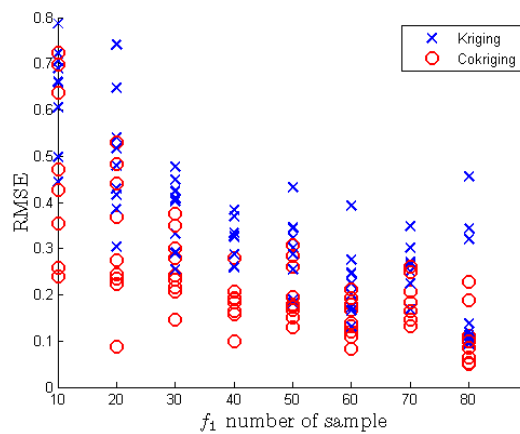


圖 4.19: 不同樣本數下Kriging和Cokriging均方根誤差結果比較

再來我們則是要探討當同樣本數下，Kriging模型跟Cokriging模型的預測精準度。用單點移出法(Leave One Out)的方法和均方根誤差來做結果的比較，如圖4.20，預測主函數 f_1 之B點位置。

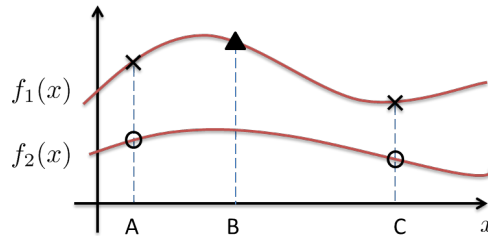


圖 4.20: Kriging和Cokriging樣本數相同預測示意圖

將著將主函數與輔助函數樣本數慢慢減少，但兩者的樣本位置為相同，並隨機反覆比較其10結果的誤差，如圖4.21所示。

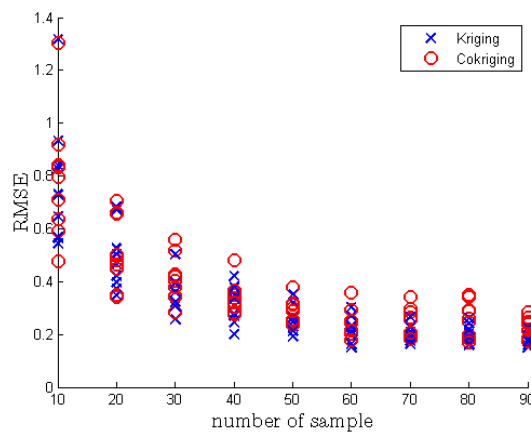


圖 4.21: 同樣本數下Kriging和Cokriging均方根誤差結果比較

由圖4.19與4.21兩者誤差結果比較我們可以發現，兩者的模型除了都會隨著樣本數的增加而使誤差變小外，也發現Cokriging較適合用來預測主函數相對於輔助函數遺失的樣本，而如果考慮兩者同樣本數的隨機函數，則Cokriging的預測模型似乎沒比Kriging模型佔優勢，甚至Cokriging的誤差還比Kriging模型大。

此時我們將Kriging模型與Cokriging模型的特色列表如下

- Kriging模型

因為只考慮單一隨機函數的關係，在變異圖擬合方面相當容易且快速，且預測出來的變異數一定保有非負值，無須像Cokriging需考慮Permissible模型。

- Cokriging模型

特色是利用輔助函數所擁有的樣本值相對於主隨機函數所欠缺的樣本位置進行推估的話，能較精準於用Kriging模型進行單一隨機函數的預測結果。若各組隨機函數間無太大相關性則預測模型的結果會不準。如圖4.21，考慮了兩組相同樣本數的隨機函數來進行主隨機函數的預測，其誤差的結果較高於用Kriging模型。

由於在本論文裡對於變異圖與交叉變異圖的擬合過程都是利用平方誤差最小化來進行求解，而且每組變異圖裡都只包含一組理論變異圖函數，造成我們限制了變異圖隨著距離的發展性，而一般地理統計裡都是觀察其資料趨勢，而選用一個或多個且參數不同的理論變異圖函數來進行整合，舉例來說，在本論文裡每個變異圖所用來擬合的函數不是由單一個指數模型就是單一個球型模型來建構，而地理統計卻是由觀察的資料的特性且由兩種以上的理論變異圖函數來進行擬合，如方程式(4.74)為一個交叉變異圖模型，距離0到200m為球型模型所構成，200m到1.3km為指數模型所構成，充分的讓資料隨著距離有良好的發展性。

$$\gamma_{12}(\mathbf{h}) = 0.3\text{Sph}(h/200\text{m}) + 0.26\text{Exp}(h/1.3\text{km}) \quad (4.74)$$

而本論文之所以會用平方誤差最小化來進行擬合，是希望能建構一個可以解決通用問題的方法，因此對於Kriging與Cokriging模型的優點與缺點，僅限於本論文內用平方誤差最小化的結果來進行討論，或許在地理統計的概念可以選用多個以上的理論變異圖結合，讓圖4.21的Cokriging模型的誤差結果完全的低於Kriging模型。

第五章 工程範例

5.1 簡易懸臂樑安全問題

5.1.1 單一設計可靠度量測與參數推估

此問題為一個簡易懸臂樑的應力分析問題，如圖5.1所示，其懸臂樑的尺寸長度(L)為50mm、寬度(W)為10mm、高度(H)為10mm，材料假設為鋼鐵，楊氏係數為200000MPa、蒲松氏比為0.3。樑柱的一端被固定在牆壁，另一端則受21000N向下的力量，此分析主要探討懸臂樑受到的應力大小有無在降伏強度250MPa的安全範圍內。

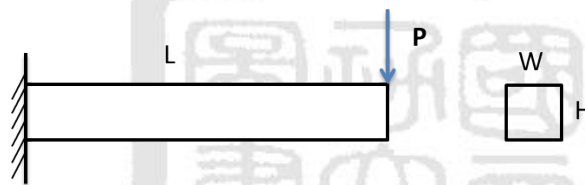


圖 5.1: 簡易懸臂樑

針對此懸臂樑的設計來進行可靠度量測，首先對此設計進行量化生產以便進行可靠度試驗，生產的數量為60個懸臂樑，而考慮不確定因素的影響，其設計參數中的彈性係數與作用力呈現高斯分佈的情況，如表5.1。從量產出來的懸臂樑進行最大應力分析，如圖5.2，為此設計的懸臂樑最大應力分佈圖，橫軸為最大應力值，縱軸為懸臂樑相對應於最大應力的數目。

表 5.1: 懸臂樑設計參數

設計參數	範圍	單位
彈性係數(E)	$N(200000, 1000)$	MPa
作用力(P)	$N(21000, 500)$	N

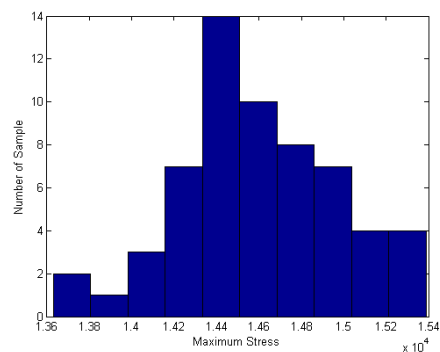


圖 5.2: 懸臂樑之最大應力分佈圖

此時假設懸臂量抵抗應力的降伏強度受時間的影響而老化，如圖5.3，時間單位為週數。

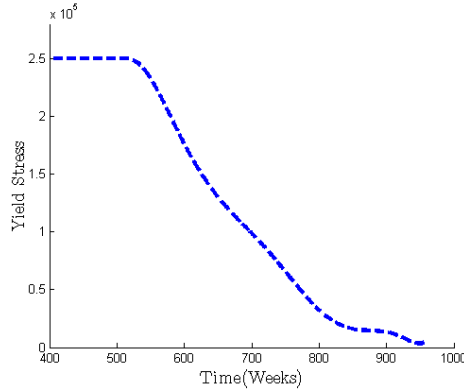


圖 5.3: 懸臂樑之降伏應力隨時間下降

接著進行可靠度試驗及量測，從時間886週到1000週開始進行60個懸臂量的破壞檢驗，每次檢驗的數量為3個，只要當檢驗的懸臂樑最大應力結果大於當下降伏應力即視為破壞，未破壞則為設限，量測的結果為此懸臂樑的可靠度資料，如表5.7，接著將可靠度資料的結果用最大似然進行可靠度參數推估，推估的結果為 $\hat{\mu}=6.8752$ 、 $\hat{\sigma}=0.0437$ ，並由這些參數來繪製可靠度函數圖，如圖5.2，橫軸為檢測時間，縱軸為相對於時間的破壞機率。

圖 5.4: 懸臂樑可靠度資料

時間(週數)	所剩樣本數	破壞	設限
886	60	1	2
892	57	1	2
898	54	0	3
...
994	6	3	0
1000	3	0	3

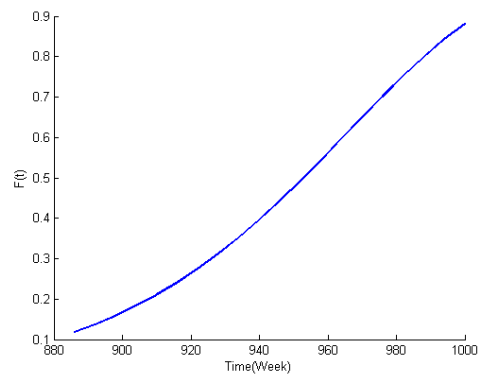


表 5.2: 懸臂樑之可靠度函數分佈圖

5.1.2 不同設計下之可靠度參數

由上一小節我們已經知道如何量測一個設計的可靠度資料以及進行可靠度參數推估，而建立可靠度函數反應曲面需要不同的設計以及相對應的可靠度參數，因此我們對原來的懸臂

樑做設計上的更改，將懸臂樑的寬與高分別取16組不同截面積的設計，其它的參數與變數則維持不變，再對每一組設計進行可靠度量測，可以分別得到16組的可靠度資料，並且用最大似然法推估各別的可靠度參數，所以我們就有了16種不同設計以及它們分別的可靠度參數，如表5.3，將每個設計的可靠度參數繪製成可靠度函數圖，如圖5.5，為16種不同設計的可靠度函數分佈。

表 5.3: 懸臂樑設計變數與可靠度參數

	設計變數 x		韋伯分佈可靠度參數	
	寬(W)	高(H)	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1	10	10	6.8752	0.0437
2	10	20	6.8792	0.0408
3	10	30	6.8810	0.0393
⋮			⋮	
15	40	30	6.8867	0.0352
16	40	40	6.8848	0.0366

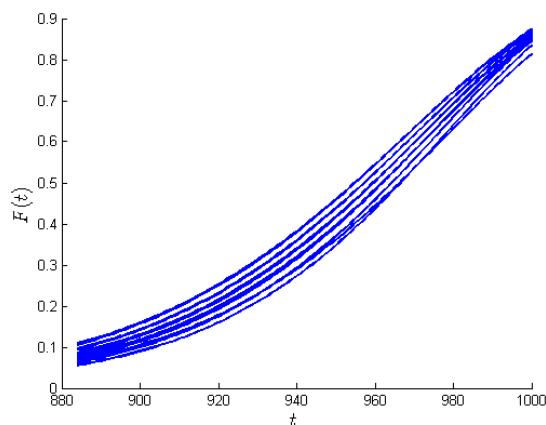


圖 5.5: 現有設計可靠度函數分佈情形

5.1.3 Kriging與Cokriging模型比較

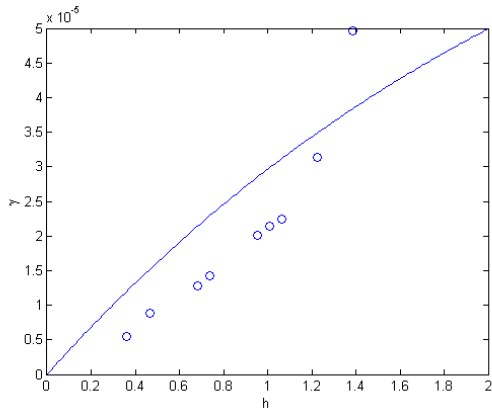
有了現有設計的懸臂樑以及相對應的可靠度參數後，就可以建構可靠度函數反應曲面，此時我們用單點移出和均方根誤差的方式，來比較Kriging和Cokriging的預測模型，選用誤差較小的模型來建構可靠度函數反應曲面，均方根誤差的結果如表5.4。

表 5.4: 懸臂樑設計可靠度參數均方根誤差

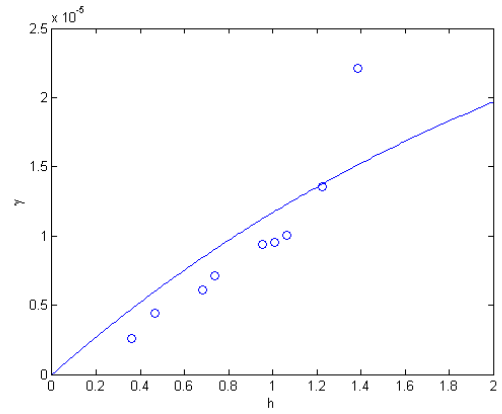
模型	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Kriging	3.3333e-06	3.9909e-08
Cokriging	4.7156e-06	6.6135e-07

並分別將Kriging的變異圖和Cokriging的交叉變異圖之擬合結果繪製，選用的理論變異圖為指數模型，其中在計算變數間的距離時，本論文都會將其縮放到0~1之間，例如設計變數中的10、20、30和40，經過縮放後會轉換成0、0.3333、0.6667和1，故在下列變異圖與交叉變異圖中的變數距離都是以0~1來計算。

● Kriging模型擬合結果



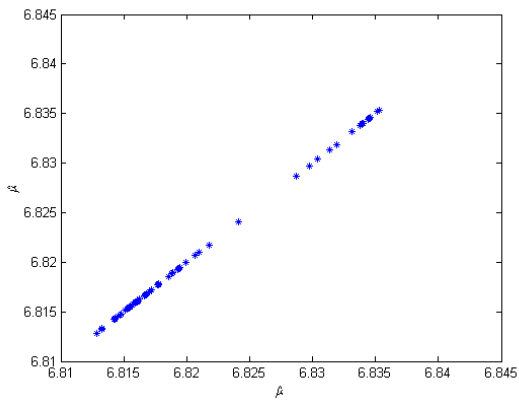
(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 變異圖擬合



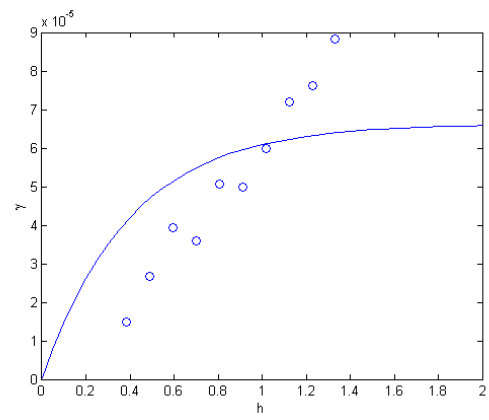
(b) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 變異圖擬合

圖 5.6: 懸臂樑設計可靠度參數Kriging模型變異圖結果

● Cokriging模型擬合結果

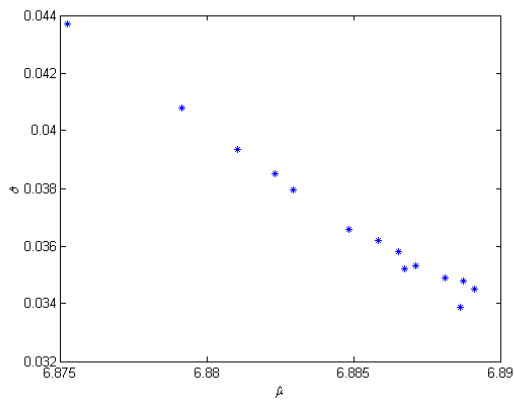


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 相關性

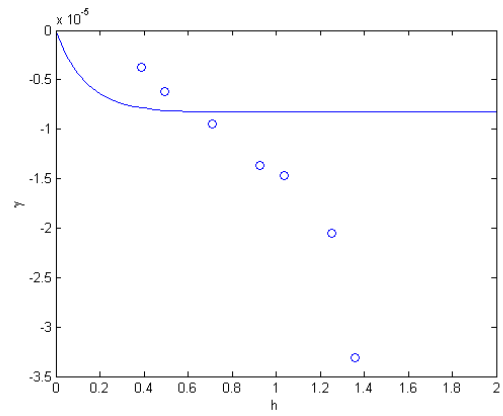


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 變異圖擬合

圖 5.7: 懸臂樑設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 之Cokriging模型變異圖結果

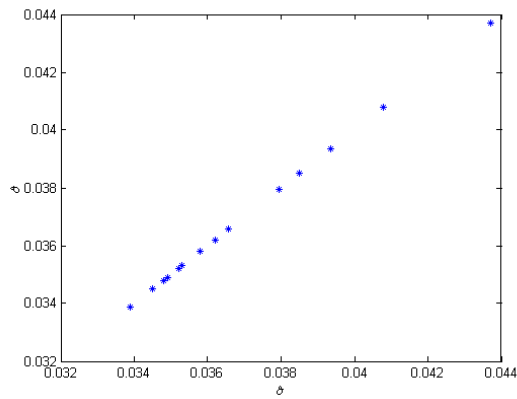


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 相關性

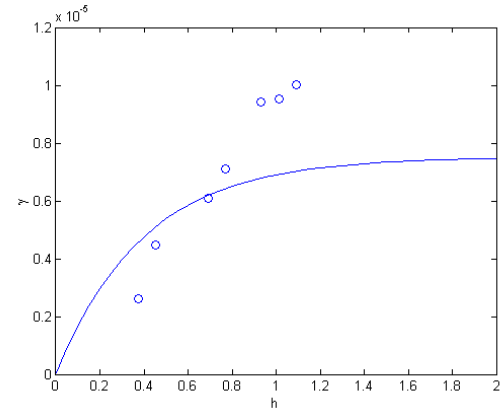


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 交叉變異圖擬合

圖 5.8: 懸臂樑設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果



(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 相關性



(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 變異圖擬合

圖 5.9: 懸臂樑設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型變異圖結果

從均方根的誤差結果來看，我們選用誤差較小的Kriging模型來作為可靠度函數反應曲面的建構。

5.1.4 時變可靠度最佳化設計

有了現有設計的懸臂樑以及相對應的可靠度參數，就可以根據方程式(3.1)，用Kriging模型建構出一個可靠度函數反應曲面，此反應曲面如下列方程式(5.1)所示， \mathbf{x} 為懸臂樑的設計變數：寬、高， $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 則為相對應設計變數的可靠度參數。

$$\hat{F}(t) = \mathcal{F}(t, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) = \mathcal{F}(t, \hat{\mu}(\mathbf{x}), \hat{\sigma}(\mathbf{x})) \quad (5.1)$$

根據方程式(3.7)將可靠度函數反應曲面加入最佳化設計的概念，此時目標函數為最輕的懸臂

樑，代表面積最小的設計變數，懸臂樑的時變可靠度最佳化設計數學式如方程式(5.2)所示。

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathcal{F}(t, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) \leq F' \\
 & t^{\text{LB}} \leq t \leq t^{\text{UB}} \\
 & \mathbf{x}^{\text{LB}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{UB}}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

根據方程式5.2所示，時變可靠度最佳化設計問題是希望能夠在某段時間內可靠度函數的限制條件下，找到讓目標函數最好的設計。此時我們時間限制區間 $t^{\text{LB}} \leq t \leq t^{\text{UB}}$ 為900週到980週，接著分別試著用不同的限制條件來進行兩個問題的求解，如圖5.10，第一個問題的可靠度參數限制條件必須滿足 $\mu'=6.886$ 與 $\sigma'=0.035$ ，求得的結果為 $\hat{\mu}=6.8866$ 與 $\hat{\sigma}=0.0353$ ，相對應的最佳設計解為寬19.2616mm與高33.4069mm。第二個問題的限制條件為 $\mu'=6.881$ 與 $\sigma'=0.0389$ ，求得的結果為 $\hat{\mu}=6.8866$ 與 $\hat{\sigma}=0.042$ ，相對應的最佳設計解為寬10mm與高27.6237mm。最佳化結果如表5.5與圖5.11。

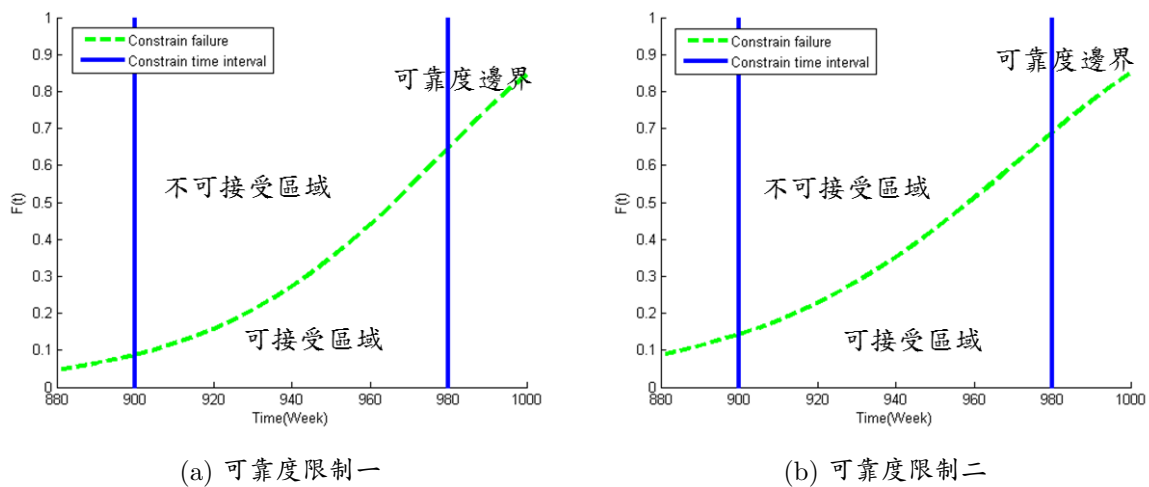
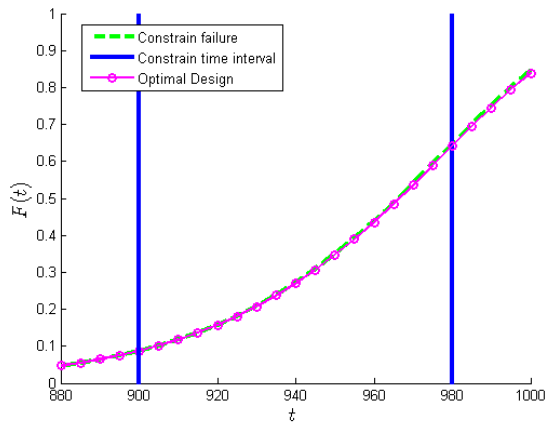


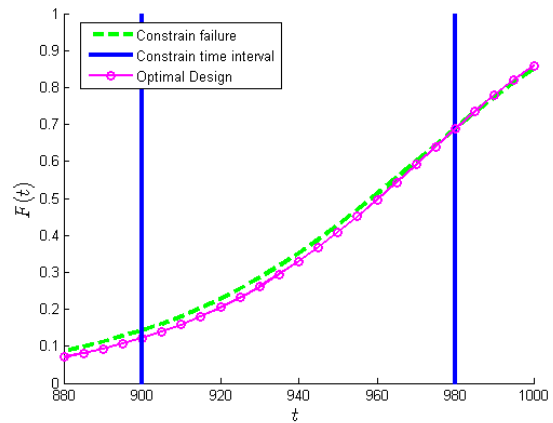
圖 5.10: 懸臂樑最佳化設計之可靠度限制條件

表 5.5: 懸臂樑最佳化設計及壽命結果

	最佳設計結果		最佳設計之可靠度參數		限制條件之可靠度參數	
	寬(W)(mm)	高(H)(mm)	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	μ'	σ'
1	19.2616	33.4069	6.8866	0.0353	6.886	0.035
2	10	27.6237	6.8816	0.042	6.881	0.0389



(a) 最佳設計結果一



(b) 最佳設計結果二

圖 5.11: 懸臂樑最佳化設計之可靠度函數

由結果可以發現，在不同的可靠度限制條件下，分別可以找到不同的最佳解，而找到的最佳解的可靠度參數都是先根據限制條件所找到的，再由可靠度參數從反應曲面去搜尋包含此參數所可能的設計變數，再根據目標函數的要求由這些設計變數找到最佳設計解，而有了最佳解及可靠度參數，即可以得到其最佳設計與時間相關的可靠度函數。

5.2 腳踏車車架設計

5.2.1 單一設計可靠度量測與參數推估

圖5.12為某一款腳踏車車架(不包含輪子部分)，單位為公尺(m)，材質為鋼鐵。車架的結構是由空心管焊接而成的，設計負載為整體重量的百分之75作用在椅墊上，手把部分則分擔了百分之25的重量，考慮腳踏車可能會有其他衝擊負載，將乘上安全係數2.5做為總負載，初步的設計是全部外徑0.1m，管壁厚度為 $(D/16)$ m的鋼管。分析此車架的應力是否有降伏強度250MPa範圍內，大於降伏強度則可能發生破壞。

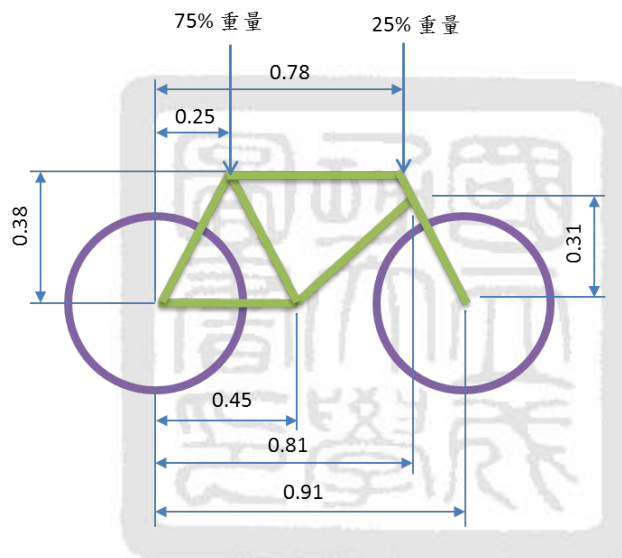


圖 5.12: 腳踏車車架設計

針對此款腳踏車車架的設計來進行可靠度量測，首先對此設計進行量化生產以便進行可靠度試驗，生產的數量為30台個腳踏車車架，而考慮不確定因素的影響，其設計參數中的彈性係數與重量呈現高斯分佈的情況，如表5.6。從量產出來的腳踏車車架進行最大應力分析，如圖5.13，為此腳踏車車架設計的最大應力分佈圖，橫軸為最大應力值(Mpa)，縱軸為腳踏車車架相對應於最大應力的數目。

此時假設腳踏車車架抵抗應力的降伏強度受時間的影響而老化，如圖5.14，時間單位為週數。

接著進行可靠度試驗及量測，從時間820周至960周開始進行30台腳踏車的破壞檢驗，每次檢驗的數量為4個，只要當檢驗的車架最大應力結果大於當下降伏應力即視為破壞，未破

表 5.6: 腳踏車車架設計參數

設計參數	範圍	單位
彈性係數(E)	$N(200000, 5000)$	MPa
重量(W)	$N(75, 20)$	Kg
安全係數	2.5	常數

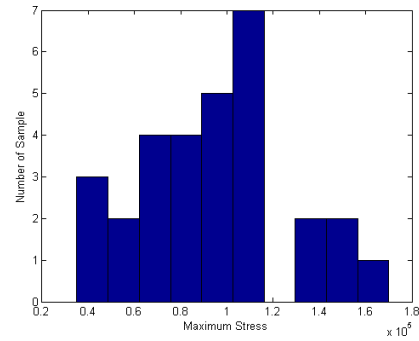


圖 5.13: 腳踏車車架之最大應力分佈圖

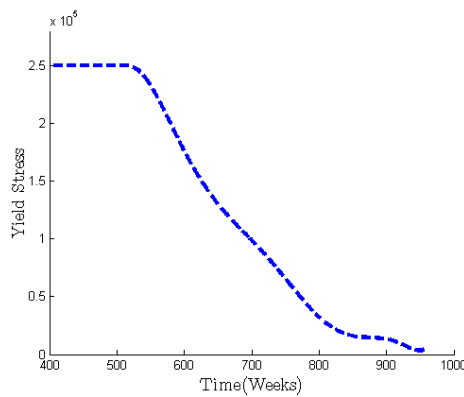


圖 5.14: 腳踏車車架材質之降伏應力隨時間下降

壞則為設限，量測的結果為此款腳踏車車架設計的可靠度資料，如表5.7，接著將可靠度資料的結果用最大似然進行可靠度參數推估，推估的結果為 $\hat{\mu}=6.8132$ 、 $\hat{\sigma}=0.05$ 、 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}=1.0094e-04$ 、 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}=6.099e-05$ 、 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}=-1.29e-05$ ，由這些參數來繪製可靠度及95%信賴區間函數圖。如圖5.2，橫軸為檢測時間，縱軸為破壞機率，實線為可靠度，虛線為相對於可靠度的95%信賴區間。

表 5.7: 腳踏車車架可靠度資料

時間(週數)	所剩樣本數	破壞	設限
820	30	3	1
840	26	4	0
860	22	3	1
...
940	6	2	2
960	2	0	2

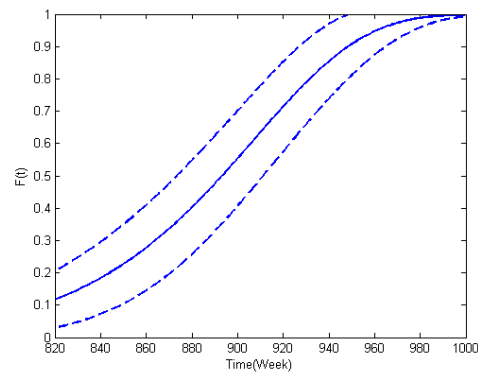


圖 5.15: 腳踏車車架之可靠度函數分佈圖

5.2.2 不同設計下之可靠度參數

由上一小節，我們已經知道如何對一款的腳踏車車架進行可靠度量測以及可靠度參數推估，而建立一個可靠度函數反應曲面需要由不同的設計和相對應的可靠度參數來進行，此時將腳踏車車架的設計分成三部分，各別由不同外徑大小所組成，如圖5.16所示。

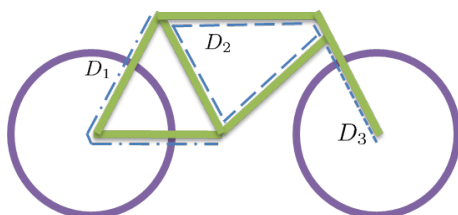


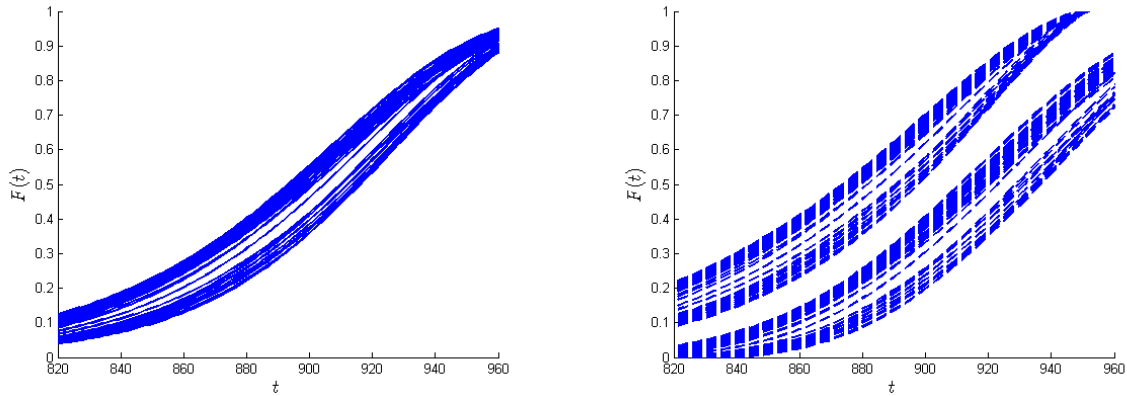
圖 5.16: 腳踏車車架外徑設計圖

每一款腳踏車設計都是由三個不同外徑大小的鋼管所構成的，選取了64款現行的車架，針對每款設計都進行可靠度量測以及可靠度參數推估，其結果如表5.8，為不同款的腳踏車車架設計及相對應的韋伯分佈可靠度參數。

表 5.8: 腳踏設計變數與可靠度參數

	設計變數(m)			韋伯分佈可靠度參數				
	D_1	D_2	D_3	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$	$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$	$\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$
1	0.100	0.100	0.100	6.8132	0.0500	1.0094e-04	6.0999e-05	-1.2900e-05
2	0.100	0.115	0.100	6.8142	0.0508	1.0617e-04	6.5011e-05	-1.1379e-05
3	0.100	0.130	0.100	6.8160	0.0516	1.1448e-04	7.1224e-05	-7.9011e-06
⋮		⋮					⋮	
63	0.145	0.130	0.145	6.8314	0.0425	1.1067e-04	6.2591e-05	7.3166e-05
64	0.145	0.145	0.145	6.8297	0.0428	1.0770e-04	6.1880e-05	4.8179e-05

接著將每款設計的可靠度參數推估結果繪製成可靠度函數，如圖5.17，為64款不同設計的腳踏車車架可靠度函數與95%信賴區間分佈圖。



(a) 現有車架可靠度函數分佈情形

(b) 現有車架可靠度函數95%信賴區間分佈情形

圖 5.17: 64款腳踏車車架設計之可靠度函數

5.2.3 Kriging與Cokriging模型比較

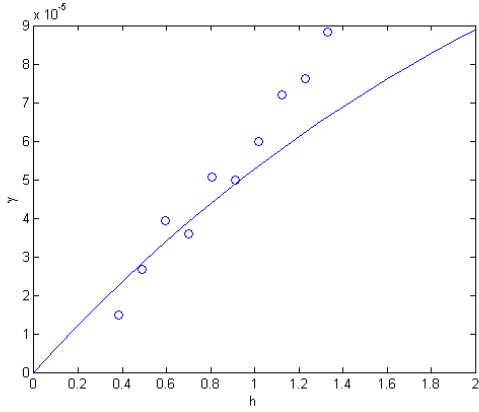
有了現有設計的腳踏車車架設計以及相對應的可靠度參數後，就可以建構可靠度函數反應曲面，此時我們用單點移出和均方根誤差的方式，來比較Kriging和Cokriging的預測模型，選用誤差較小的模型來建構可靠度函數反應曲面，均方根誤差的結果如表5.9。

表 5.9: 腳踏車車架設計可靠度參數均方根誤差

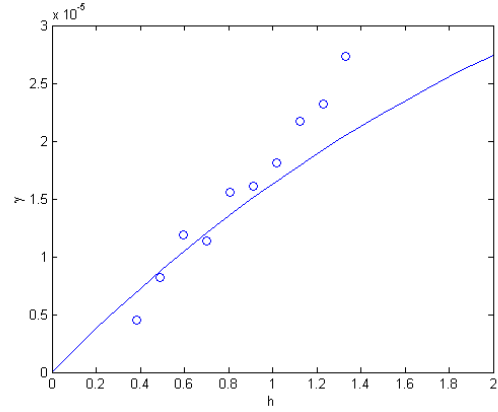
模型	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$	$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$	$\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$
Kriging	1.1950e-07	2.1558e-08	1.0365e-08	3.2098e-08	1.9447e-08
Cokriging	2.6068e-06	1.2040e-06	1.2695e-06	3.6631e-06	7.0216e-07

並分別將Kriging的變異圖和Cokriging的交叉變異圖之擬合結果繪製，選用的理論變異圖為指數模型，其中在計算變數間的距離時，本論文都會將其縮放到0~1之間，例如設計變數中的0.100、0.115、0.130和0.145，經過縮放後會轉換成0、0.3333、0.6667和1，故在下列變異圖與交叉變異圖中的變數距離都是以0~1來計算。

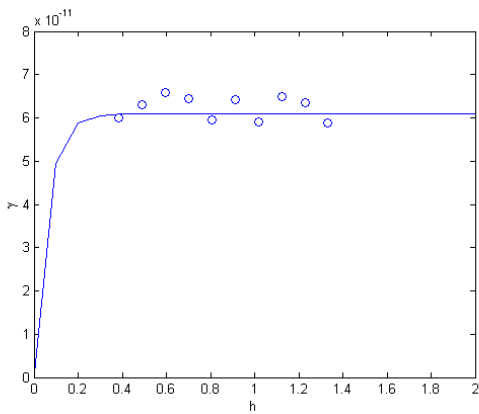
- Kriging模型擬合結果



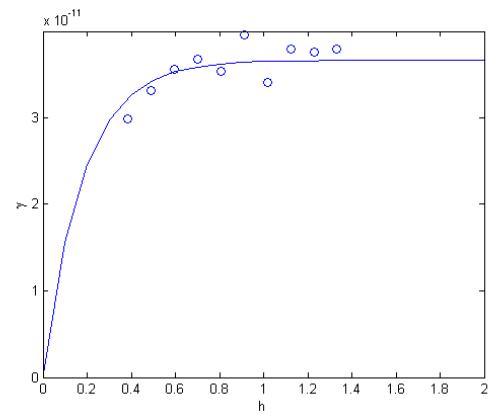
(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 變異圖擬合



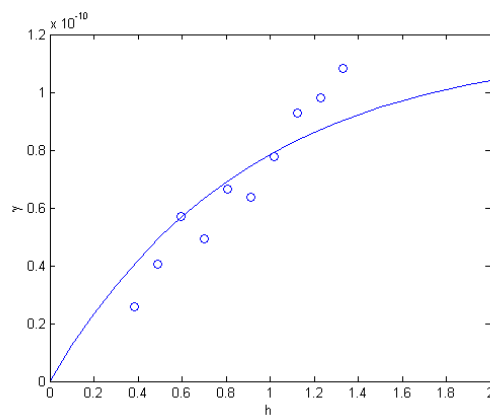
(b) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 變異圖擬合



(c) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 變異圖擬合



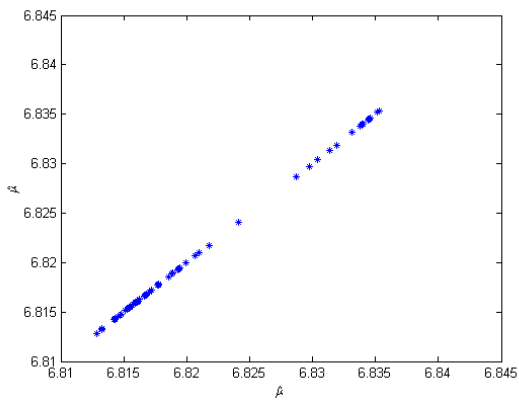
(d) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 變異圖擬合



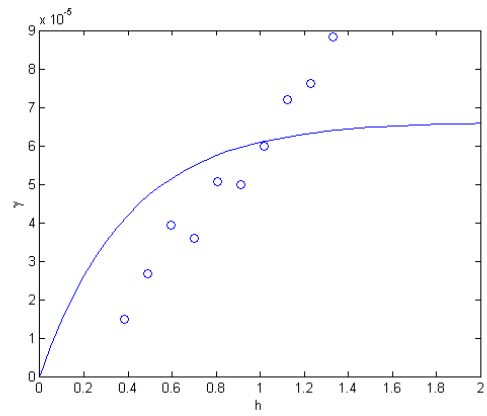
(e) 可靠度參數 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\hat{\sigma}}$ 變異圖擬合

圖 5.18: 車架設計可靠度參數Kriging模型變異圖結果

- Cokriging模型擬合結果

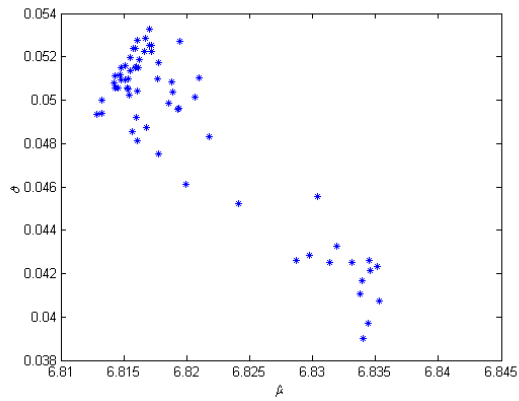


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 相關性

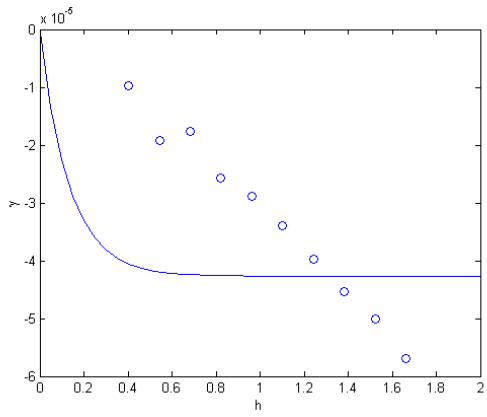


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 變異圖擬合

圖 5.19: 車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 之Cokriging模型變異圖結果

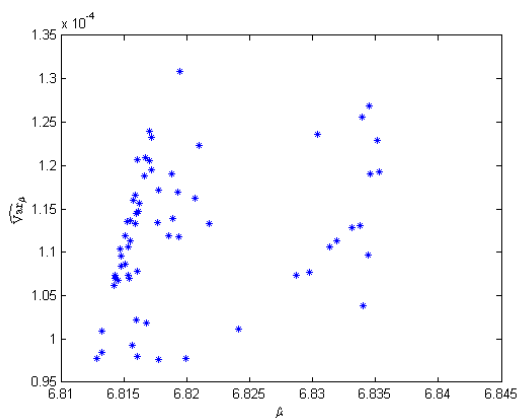


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 相關性

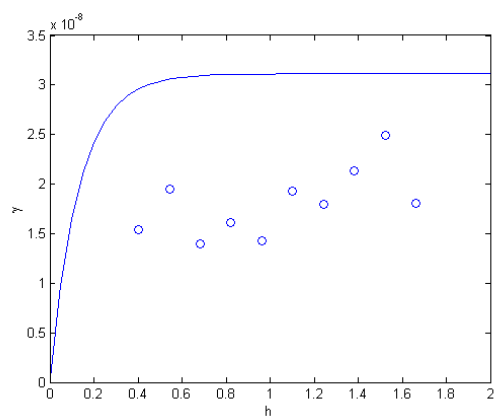


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 交叉變異圖擬合

圖 5.20: 車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

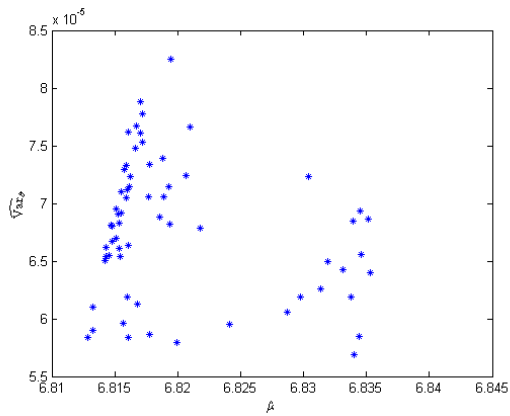


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 相關性

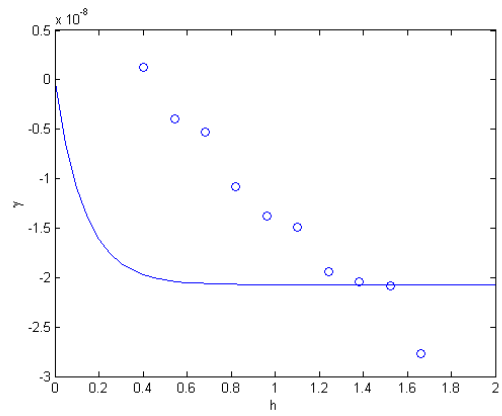


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.21: 車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

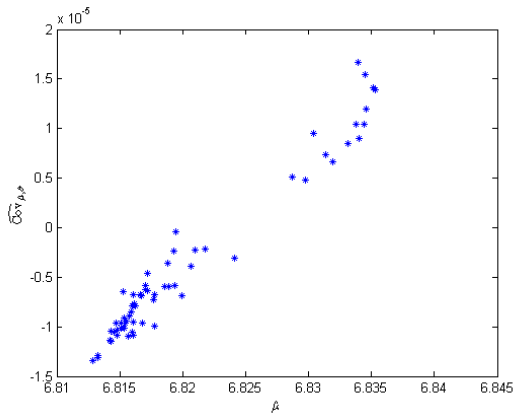


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\delta}$ 相關性

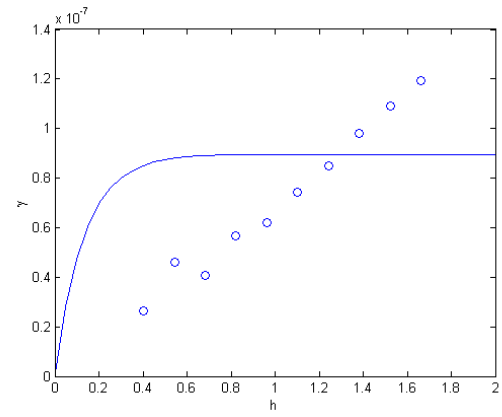


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\delta}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.22: 車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\delta}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

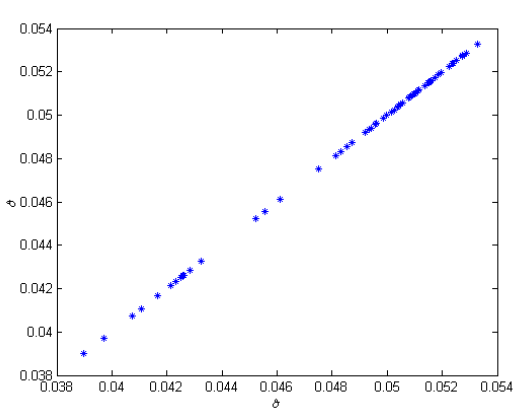


(a) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\delta}$ 相關性

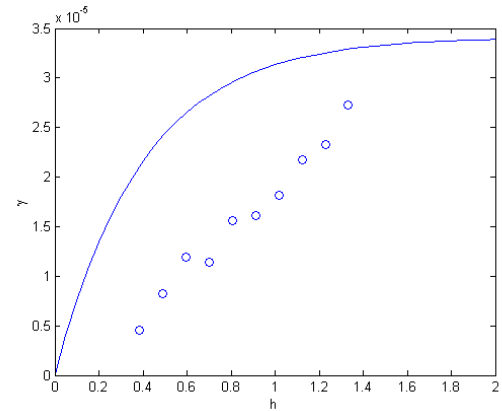


(b) 可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\delta}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.23: 車架設計可靠度參數 $\hat{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu},\delta}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

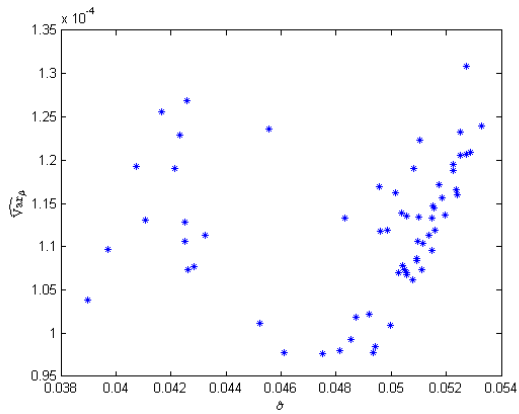


(a) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 相關性

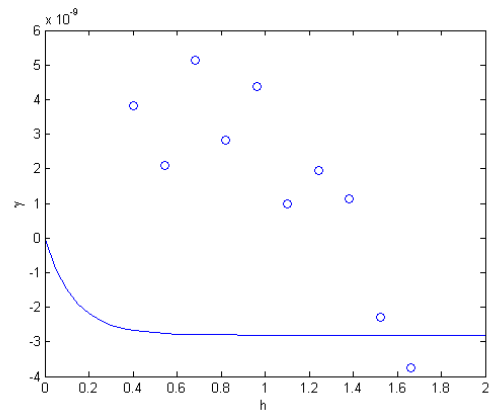


(b) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 變異圖擬合

圖 5.24: 車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

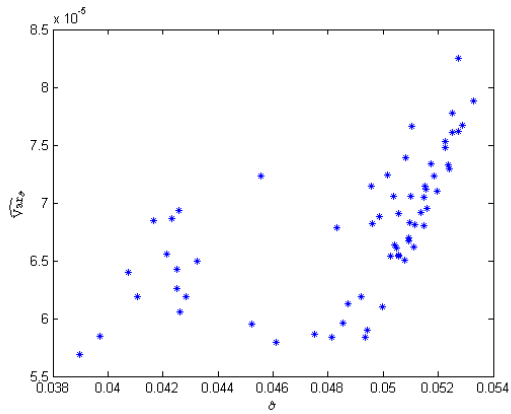


(a) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 相關性

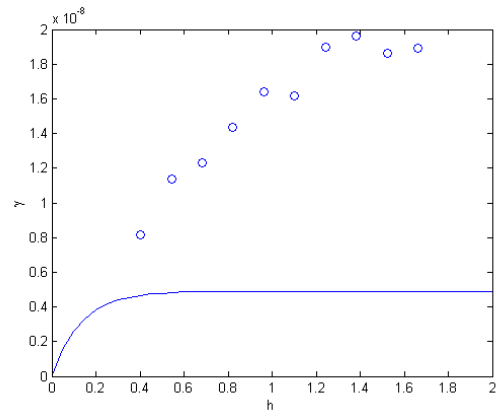


(b) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.25: 車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

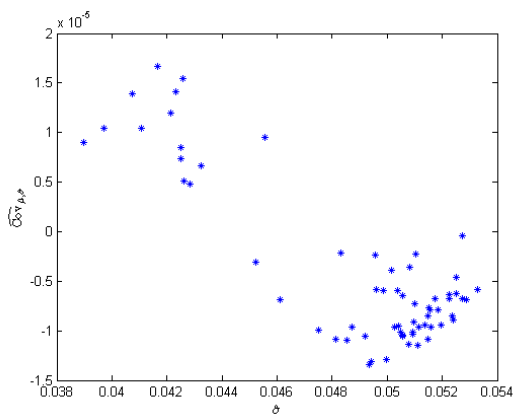


(a) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 相關性

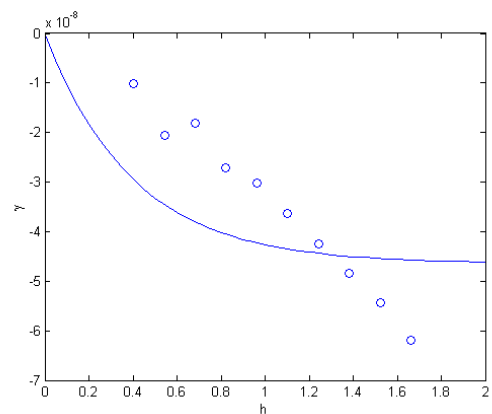


(b) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.26: 車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

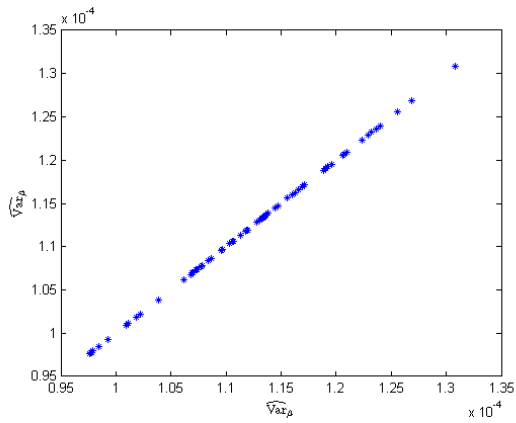


(a) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$ 相關性

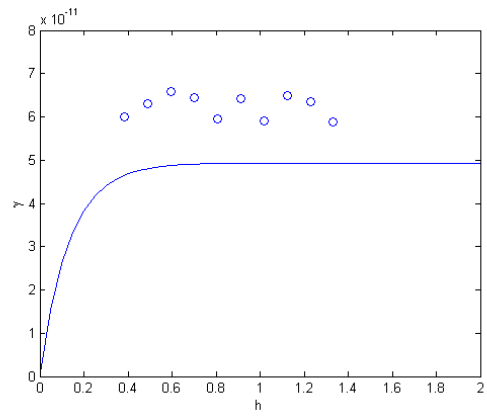


(b) 可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.27: 車架設計可靠度參數 $\hat{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

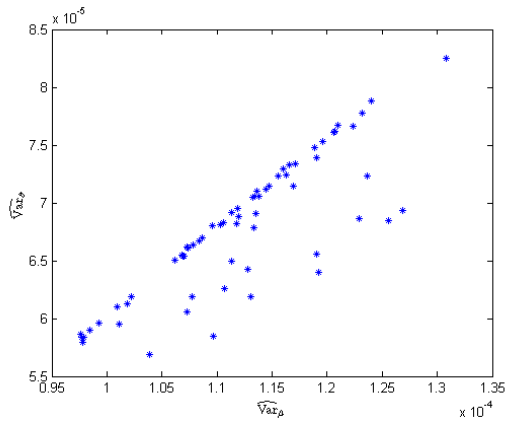


(a) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 相關性

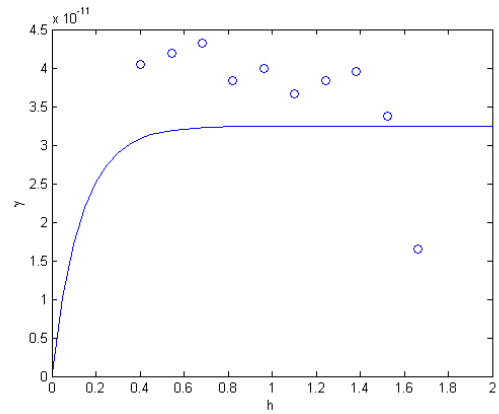


(b) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 之變異圖擬合

圖 5.28: 車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 之Cokriging模型變異圖結果

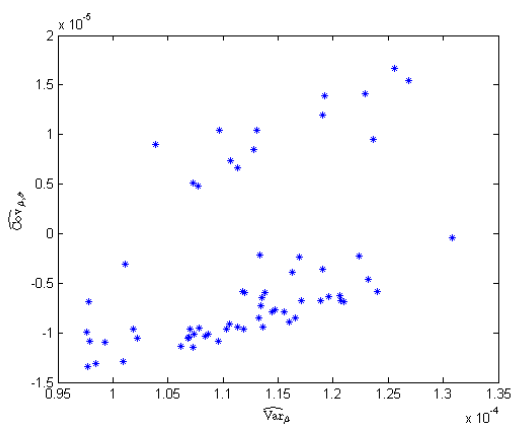


(a) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\delta}$ 相關性

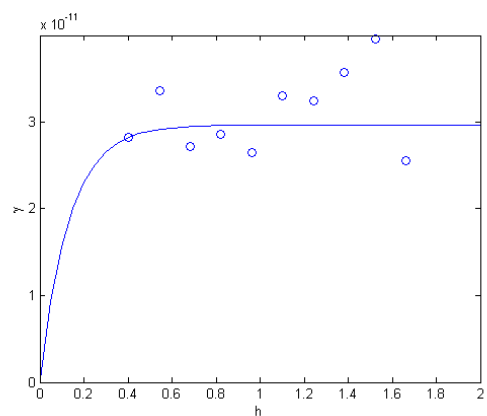


(b) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\delta}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.29: 車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\delta}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

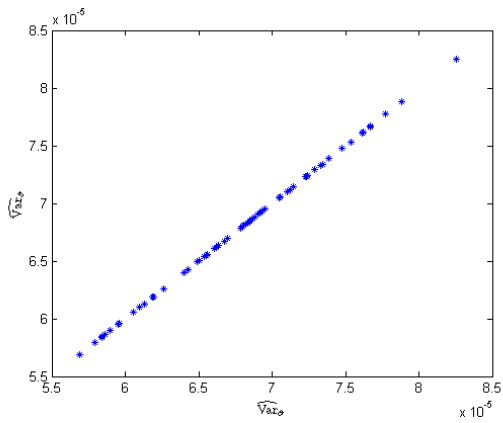


(a) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\delta}$ 相關性

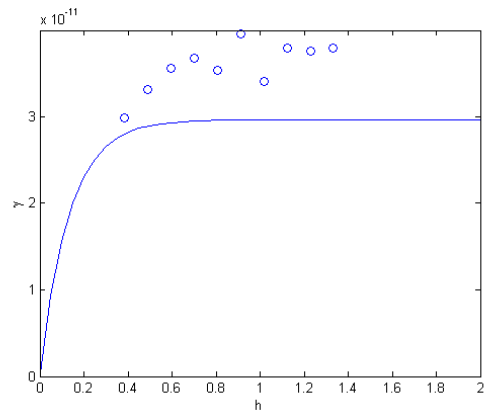


(b) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\delta}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.30: 車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\delta}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

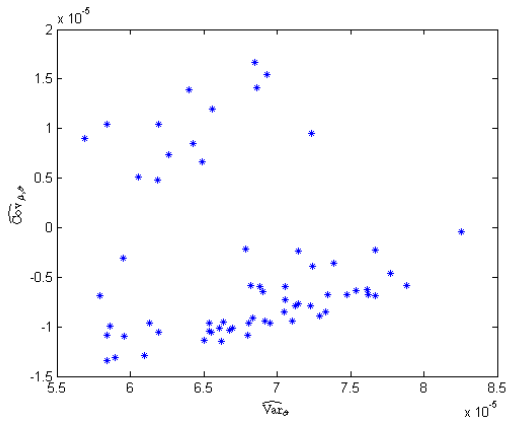


(a) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\sigma}$ 相關性

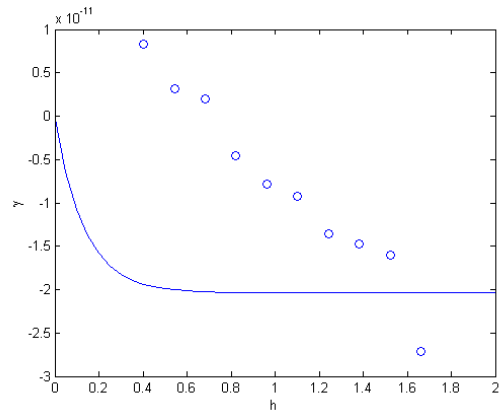


(b) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\sigma}$ 之變異圖擬合

圖 5.31: 車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\mu}$ 與 $\widehat{\text{Var}}_{\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果

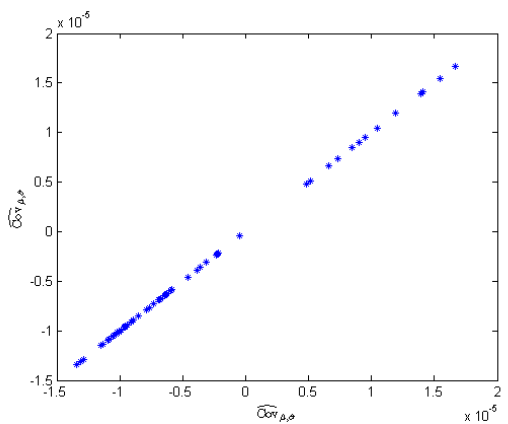


(a) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\sigma}$ 相關性

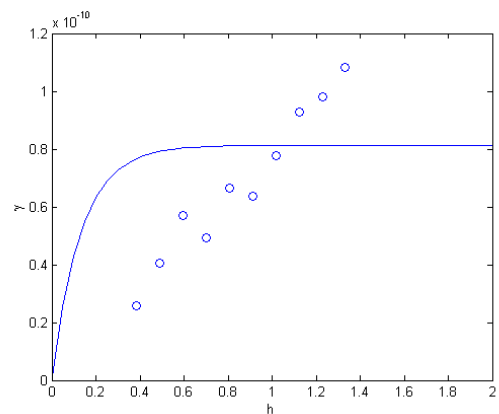


(b) 可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\sigma}$ 之交叉變異圖擬合

圖 5.32: 車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Var}}_{\sigma}$ 與 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\sigma}$ 之Cokriging模型交叉變異圖結果



(a) 可靠度參數 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\sigma}$ 相關性



(b) 可靠度參數 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\sigma}$ 之變異圖擬合

圖 5.33: 車架設計可靠度參數 $\widehat{\text{Cov}}_{\mu,\sigma}$ 之Cokriging模型變異圖結果

在進行Cokriging的擬合時，因為要考慮了Permissible模型的限制條件，導致有些擬合的結果與實驗結果有所差異，如圖5.21b、5.26b、5.29b、5.28b和5.31b。而有些交叉變異圖的結果可能是因為兩組函數間無相關性，導致交叉變異圖的結果沒有隨距離有發展趨勢或是呈現碎塊效應，如圖5.25。而Kriging模型的擬合結果似乎都跟實際結果差不多，且從均方根的誤差結果來看，我們選用誤差較小的Kriging模型來作為可靠度函數反應曲面的建構。

5.2.4 時變可靠度最佳化設計

有了所有設計的腳踏車車架及相對應的可靠度參數後，就可以根據方程式(3.1)，用Kriging模型建立一個可靠度函數反應曲面，此反應曲面如下列方程式(5.3)所示，其中 β 為信賴區間因子，腳踏車車架的外徑設計變數為 \mathbf{x} ： D_1 、 D_2 與 D_3 ， $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ 為相對應設計變數的可靠度參數， \hat{F} 為可靠度， \underline{F} 與 \overline{F} 為可靠度信賴區間。

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{F}} &= [\underline{F}, \hat{F}, \overline{F}] \\
 &= \hat{F} \pm z_{1-\beta/2} \hat{\text{se}}_{\hat{F}} \\
 &= \mathcal{F}(t, \beta, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) \\
 &= \hat{F}(t, \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}), \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) \pm z_{1-\beta/2} \hat{\text{se}}_{\hat{F}}(t, \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}), \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}), \widehat{\text{Var}}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\mathbf{x}), \widehat{\text{Var}}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}), \widehat{\text{Cov}}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x})) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

根據方程式(3.7)將可靠度函數反應曲面加入最佳化設計的概念，此時目標函數為體積最小的腳踏車車架，腳踏車車架的時變可靠度最佳化設計數學式如方程式(5.4)所示。

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathcal{F}(t, \beta, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) \leq F' \\
 & t^{\text{LB}} \leq t \leq t^{\text{UB}} \\
 & \mathbf{x}^{\text{LB}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{UB}}
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

根據方程式(5.4)所示，時變可靠度最佳化設計問題是希望能夠在某段時間內可靠度函數的限制條件下，找到讓目標函數最好的設計。我們將時間區間 $t^{\text{LB}} \leq t \leq t^{\text{UB}}$ 限制為850週到930週，接著加入一個可靠度函數的限制條件來求解，此限制條件的參數為 $\mu' = 6.82$ 與 $\sigma' = 0.053$ ，如表5.10，將限制條件用圖呈現，如圖5.34。

表 5.10: 腳踏車車架設計可靠度函數限制值

位置參數	尺度參數	時間範圍
μ'	σ'	$t^{LB} \leq t \leq t^{UB}$
6.82	0.053	[850, 930]

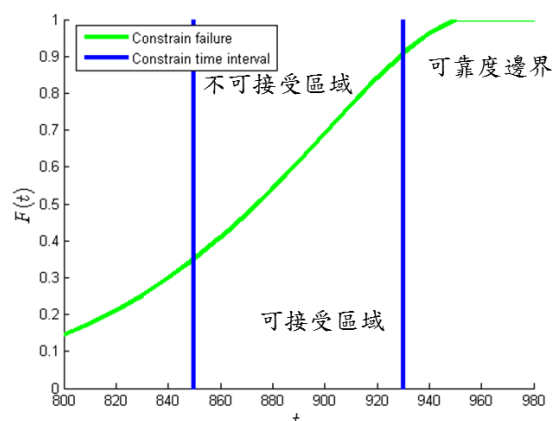


圖 5.34: 腳踏車車架設計可靠度函數限制條件

由限制條件所求得的最佳化結果如表5.11，可靠度參數為 $\hat{\mu} = 6.8254$ 、 $\hat{\sigma} = 0.0453$ 、 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}} = 1.065e-04$ 、 $\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}} = 6.1915e-05$ 、 $\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} = -1.4361e-06$ ，最佳設計為 $D_1=0.1\text{m}$ 、 $D_2=0.1049\text{m}$ 、 $D_3=0.1437\text{m}$ 。

表 5.11: 腳踏車車架最佳化設計及壽命結果

最佳設計(m)			最佳設計之可靠度參數				
D_1	D_2	D_3	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\mu}}$	$\widehat{\text{Var}}_{\hat{\sigma}}$	$\widehat{\text{Cov}}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}$
0.100	0.1049	0.1437	6.8254	0.0453	1.0650e-04	6.1915e-05	-1.4361e-06

將最佳解的可靠度參數用可靠度函數表示，如圖5.35，可以發現最佳解的可靠度函數及95%信賴區間都有完全的符合在限制條件內。

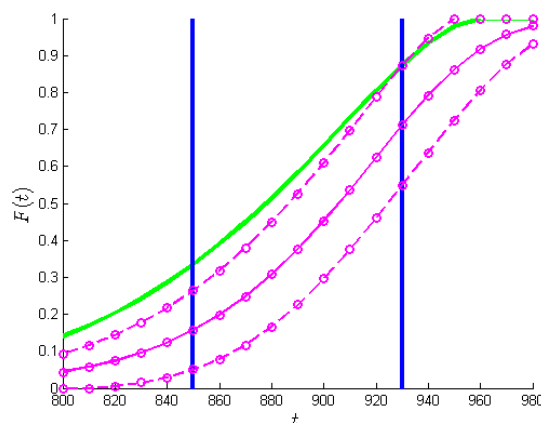
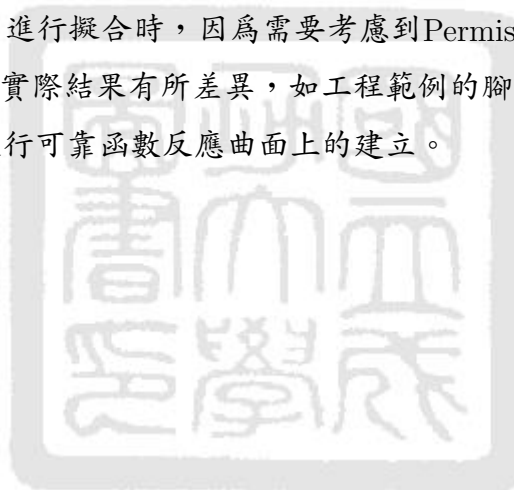


圖 5.35: 腳踏車車架最佳化設計之可靠度函數

由結果可以發現，此範例是希望能在可靠度函數的限制下，找到一個可以符合尺度參數、位置參數、尺度參數變異數、位置參數變異數、尺度參數與位置參數共變異數的可靠度參數解，如表5.11，再從這些符合的可靠度參數解，由可靠度函數反應曲面去找尋其相對應的設計變數，再根據目標函數的要求由這些設計變數中找到最佳設計解，我們不僅可以預測可靠度函數外，也可以預測其在限制條件下的信賴區間，此結果的信賴區間為95%信賴區間。

5.3 小結

本論文在此章節的工程範例分別比較了Kriging和Cokriging模型的誤差，Kriging模型的誤差都比較小，而且Cokriging在進行擬合時，因為需要考慮到Permissible的限制，導致有些變異圖或交叉變異圖擬合結果與實際結果有所差異，如工程範例的腳踏車車架設計，因此本論文會建議選用Kriging模型來進行可靠函數反應曲面上的建立。



第六章 結論

本論文針對現有產品的設計以及它們實際量測所得來的可靠度資料，結合兩者關聯性去建構一個可靠度函數反應曲面，並納入最佳化設計的問題，將原本不考慮時間的可靠度最佳設計演變成時變可靠度最佳化設計，不儘可以得到產品的最佳設計，更可以預測它隨時間改變的可靠度。

6.1 研究貢獻

本論文研究貢獻，主要可分為下列幾點

1. 探討可靠度試驗中樣本數與可靠度參數的變異程度。
2. 結合設計與可靠度參數，利用Kriging與Cokriging模型建構出一個跟設計相關的可靠度函數反應曲面。
3. 探討當兩個有相關性的函數，在不同樣本數下，比較Kriging模型與Cokriging模型所預測的精準度，發現Cokriging模型在主樣本位置遺失的情況下，較能輔助預測其更精準的結果。
4. 將可靠度函數反應曲面結合可靠度最佳化設計，演變為時變可靠度最佳化設計，不儘可以得到產品的最佳設計，亦可於預測其使用壽命。

6.2 建議

在2.1.7節提到，針對產品的母體進行多次的抽樣可靠度試驗，所得到可靠度資料可能會不一樣，而不同的可靠度資料用最大似然所預測得到的可靠度函數也會不一樣，造成的原因，可能是有部分的試件在初期就壞掉，到後期在檢驗時才被發現，雖然說這樣的情況已經是無法避免的，可是卻造成了用Kriging模型在建構可靠度函數反應曲面的問題，舉例來說，以一個懸臂樑測試為範例，假設有兩個面積為 $15 \times 15\text{mm}^2$ 和 $40 \times 40\text{mm}^2$ 懸臂樑，分別從母體中取60個試件且不重複的做10次可靠度試驗，其可靠度函數的結果如圖6.1，以常理

來說，我們應該都知道面積較大的懸臂樑的可靠度應該比面積小的還要好，但是他們在經過可靠度的試驗卻也是有機率會造成截面積小的可靠度比截面積大的好，如圖6.2所重疊的區域。如果不是重複做很多次的可靠度試驗，我們或許很難發現這是兩個不同設計的產品所造成的結果。

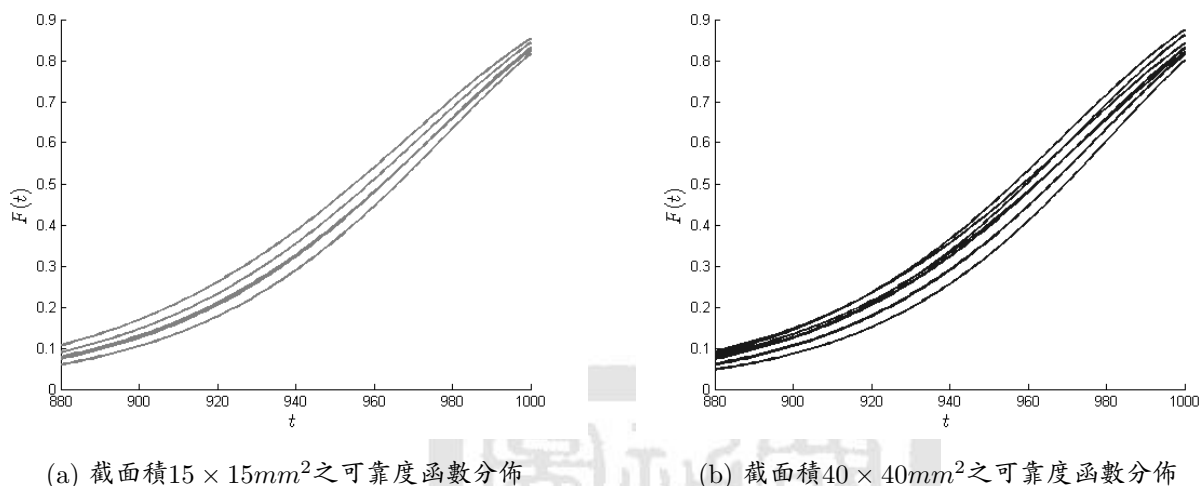


圖 6.1: 不同截面積下懸臂樑的可靠度函數結果

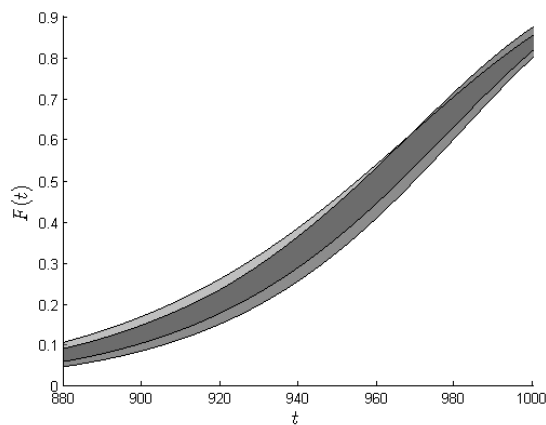


圖 6.2: 不同截面積下懸臂樑的可靠度函數差異

Kriging模型原本是用在地理統計上，但是對於一般設計問題來講，變數對於函數之間的關係，並不像地理統計領域中地理位置方向與函數的關係那麼顯著，而在建構產品的可靠度函數模型時，我們也不知道這項產品設計是不是真正跟他的可靠度參數有直接的關聯性。舉例來說，如圖6.3，為一台腳踏車的安全設計，它的設計變數可能包括了車架的尺寸、材質、以及輪胎種類、煞車線材質等，而在做可靠度試驗時，破壞的原因可能包括輪胎磨耗太多或爆胎、車架變形、煞車線斷掉等，但對於可靠度評估來講，我們得到的資訊只知道它壞了，並

無法得知產品真正壞掉的原因，如果是車架變形那應該跟車架尺寸和材質有關，而輪胎的磨耗或許跟輪胎材質有關，但是在本論中，建構可靠度函數模型時，卻是把所有的設計因子跟可靠參數全部考慮進去，如果又針對每一項破壞因素去找出有關聯性的設計，那必定又會是非常耗費資源的一項大工程，但是如果要是建構更精確的可靠度函數反應曲面，這或許是最實際的方法。



圖 6.3: 腳踏車安全設計

6.3 未來研究方向

本論文主要是利用設計與可靠度參數的關係來預測其它設計的使用壽命發展趨勢，但其中仍有許多不足之處，在此提供幾個未來研究的方向。

1. 本論文中的範例在建立可靠度資料時，當發現產品在量測時已破壞及視為確切破壞，未破壞則視為右側設限，但實際上已破壞的產品應該是要包含確切破壞與左側設限，所以往後研究可以針對不同種類的可靠度資料進行參數推估，探討其推估結果對可靠度函數反應曲面的影響性。
2. 能夠有一套方法準確算出產品設計因子與可靠度參數的敏感度，利用其相關性建構出更精準的可靠度函數反應曲面。
3. 善用Cokriging模型的輔助預測優勢性，能夠預測產品壽命資訊不足的部分，例如產品的可靠度試驗時間只做到初期，其往後的壽命發展仍有許多不足之處，所以是否能利用其它相關產品較多的壽命資訊加以輔助預測。

參 考 文 獻

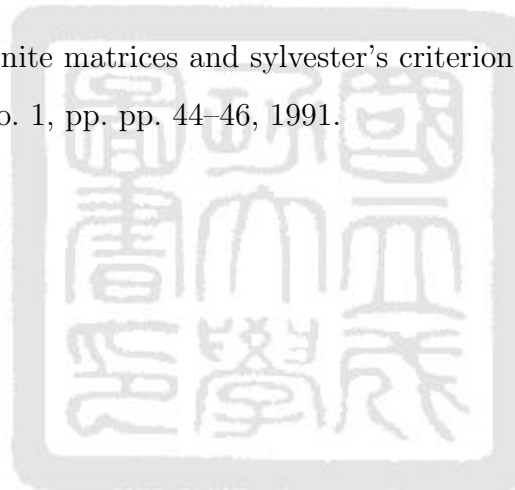
- [1] 曾昭茂, “消費者對國際性品牌與國內製造商品牌偏好之研究-以童裝服飾為例,” Master’s thesis, 國立成功大學高階管理碩士在職專班, 台灣, 2002.
- [2] P. Papalambros and D. Wilde, *Principles of Optimal Design*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2nd ed., 2000.
- [3] J. Tu, K. Choi, and Y. Park, “A new study on reliability-based design optimization,” *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 121, no. 4, pp. 557–564, 1999.
- [4] M. Allen and K. Maute, “Reliability-based shape optimization of structures undergoing fluid-structure interaction phenomena,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 30-33 SPEC. ISS., pp. 3472–3495, 2005.
- [5] L. Gu, R. Yang, C. Tho, M. Makowski, O. Faruque, and Y. Li, “Optimization and robustness for crashworthiness of side impact,” *International Journal of Vehicle Design*, vol. 26, no. 4, pp. 348–360, 2001.
- [6] A. Haldar and S. Mahadevan, *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*. John Wiley & Sons Inc, 2000.
- [7] R. L. L. Huysse, S. Padula and W. Li, “Probabilistic approach to free-form airfoil shape optimization under uncertainty,” *AIAA Journal*, vol. 40, no. 9, pp. 1764–1772, 2002.
- [8] P. Kales, *Reliability For Technology Engineering and Management*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [9] G. Savage and S. Carr, “Interrelating quality and reliability in engineering systems,” *Quality Engineering*, vol. 14, no. 1, pp. 137–152, 2001.
- [10] W. Meeker and L. Escobar, *Statistical Methods for Reliability Data*. New York, USA: Wiley-Interscience, 1998.

- [11] B. Cho, Y. Choi, and S. Shin, "Development of censored data-based robust design for pharmaceutical quality by design," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 49, no. 9-12, pp. 839–851, 2010.
- [12] J. Forbes, D. Lee, and E. Long, "Predicting reliability investment to achieve given reliability improvement," pp. 279 – 284, 2009.
- [13] V. Bogaard, J. Shreeram, and A. Brombacher, "A method for reliability optimization through degradation analysis and robust design," pp. 55–62, 2003.
- [14] T. Jin and Y. Ding, "Lifecycle based reliability growth management for electric designs," pp. 512 – 517, 2010.
- [15] L. Escobar and W. Meeker, "A Review of Accelerated Test Models," *Statistical Science*, vol. 21, no. 4, pp. 552–577, 2008.
- [16] I. Gijbels, "Censored data," *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, vol. 2, no. 2, pp. 178–188, 2010.
- [17] D. Fabiani and L. Simoni, "Discussion on application of the weibull distribution to electrical breakdown of insulating materials," *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 12, no. 1, pp. 11–16, 2005.
- [18] R. Rackwitz, "Reliability analysis-a review and some perspective," *Structural Safety*, vol. 23, no. 4, pp. 365 – 395, 2001.
- [19] C. Cornell, "Bounds on the reliability of structural systems," *American Society of Civil Engineers Proceeding , Journal of the Structural Division*, vol. 93, no. ST1, pp. 171–200, 1967.
- [20] N. C. Hasofer, Abraham M. and Lind, "Exact and invariant second-moment code format," *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 100, no. EM1, pp. 111–121, 1974.
- [21] M. Hohenbichler and R. Rackwitz, "Non-normal dependent vectors in structural safety," *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 107, no. 6, pp. 1227–1238, 1981.

- [22] X. Chen and N. Lind, “Fast probability integration by three-parameter normal tail approximation,” *Structural Safety*, vol. 1, no. 4, pp. 269 – 276, 1983.
- [23] R. Rackwitz and B. Flessler, “Structural reliability under combined random load sequences,” *Computers and Structures*, vol. 9, no. 5, pp. 489–494, 1978.
- [24] B. Ayyub and C.-Y. Chia, “Generalized conditional expectation for structural reliability assessment,” *Structural Safety*, vol. 11, no. 2, pp. 131–146, 1992.
- [25] A. Harbitz, “An efficient sampling method for probability of failure calculation,” *Structural Safety*, vol. 3, no. 2, pp. 109–115, 1986.
- [26] A. Karamchandani, P. Bjerager, and C. Cornell, “Adaptive importance sampling,” pp. 855–862, 1989.
- [27] H. Stark and J. W. Woods, *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*. Prentice Hall, 2001.
- [28] Y. Wen and H. Chen, “On fast integration for time variant structural reliability,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 2, no. 3, pp. 156–162, 1987.
- [29] C. Andrieu-Renaud, B. Sudret, and M. Lemaire, “The phi2 method: A way to compute time-variant reliability,” *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 84, no. 1, pp. 75–86, 2004.
- [30] A. Singh, Z. P. Mourelatos, and E. Nikolaidis, “An importance sampling approach for time-dependent reliability,” in *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2011.
- [31] N. Kuschel and R. Rackwitz, “Optimal design under time-variant reliability constraints,” *Structural Safety*, vol. 22, no. 2, pp. 113–127, 2000.
- [32] A. Marsden, M. Wang, J. Dennis, and P. Moin, “Optimal aeroacoustic shape design using the surrogate management framework,” *Optimization and Engineering*, vol. 5, pp. 235–262, 2004.
- [33] D. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments*. New Jersey, U.S.A.: John Wiley and Sons, 2005.

- [34] S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. New Jersey,U.S.A.: Prentice Hall, 1998.
- [35] C.-H. Liu and K.-Y. Chan, “Reliability-based design of a pressure tank under random and stochastic environments,” ASME International Design Engineering Technical Conference, August,3-6 2008.
- [36] S. Sakata, F. Ashida, and M. Zako, “Eigenfrequency optimization of stiffened plate using kriging estimation,” *Computational Mechanics*, vol. 31, no. 5, pp. 409 – 418, 2003.
- [37] K. Par, P. Oh, and H. Lim, “The application of the cfd and kriging method to an optimization of heat sink,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 49, no. 19-20, pp. 3439 – 3447, 2006.
- [38] T. Simpson, T. Mauery, J. Korte, and F. Mistree, “Kriging models for global approximation in simulation-based multidisciplinary design optimization,” *AIAA Journal*, vol. 39, no. 12, pp. 2233–2241, 2001.
- [39] D. G. Krige, “A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand,” Master’s thesis, University of Witwatersrand, 1951.
- [40] F. P. Agterberg, “Georges Matheron : Founder of spatial statistics,” *Earth Sciences History*, vol. 23, no. 2, pp. 205–334, 2007.
- [41] N. Cressie, “The origin of kriging,” *Mathematical Geology*, vol. 22, no. 3, pp. 239 – 252, 1990.
- [42] J. Sacks, W. Welch, W. Mitchell, and H. Wynn, “Design and analysis of computer experiments,” *Statistical Science*, vol. 4, no. 4, pp. 409–435, 1989.
- [43] L. Etman, “The method of Sacks, Design and analysis of computer experiments,” tech. rep., Eindhoven University of Technology, 1994.
- [44] P. Goovaerts, *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. New York Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [45] J. Martin, “Using maximum likelihood estimation to estimate kriging model parameters,” vol. 6 PART A, pp. 663–673, 2008.

- [46] Y. Huang and K.-Y. Chan, “A modified efficient global optimization algorithm for maximal reliability in a probabilistic constrained space,” *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 132, no. 6, pp. 0610021–06100211, 2010.
- [47] P. K. Kitanidis, *Introduction to Geostatistics*. Cambridge University Press, 1997.
- [48] P. Goovaerts, *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. New York Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [49] L. C. Dixon and G. P. Szegö, *Towards global optimization 2*. North- Holland, 1978.
- [50] T. Ishida and S. Kawashima, “Use of cokriging to estimate surface air temperature from elevation,” *Theoretical and Applied Climatology*, vol. 47, no. 3, pp. 147–157, 1993.
- [51] G. T. Gilbert, “Positive definite matrices and sylvester’s criterion,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 98, no. 1, pp. pp. 44–46, 1991.



自 傳

- 姓名：許佳豪
- 籍貫：嘉義市
- 出生日期：民國75年12月26日
- 學歷：
 - 國立雲林科技大學機械工程學系(94.9-98.7)
 - 國立成功大學機械工程學系碩士班(98.9-100.7)

